Estudio Analitico-Grafico de los Poliedros Arquimedianos

LAMINAS 33 AL 35

VI

Prof. T. Alvarez Peralto

VI

Lámina 33	Poliedros arquimedianos Arquimediano I ($4 P_3 + 1 P_4$)	33

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano I, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un cuadrado.

La longitud de su lado es de 40.9 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

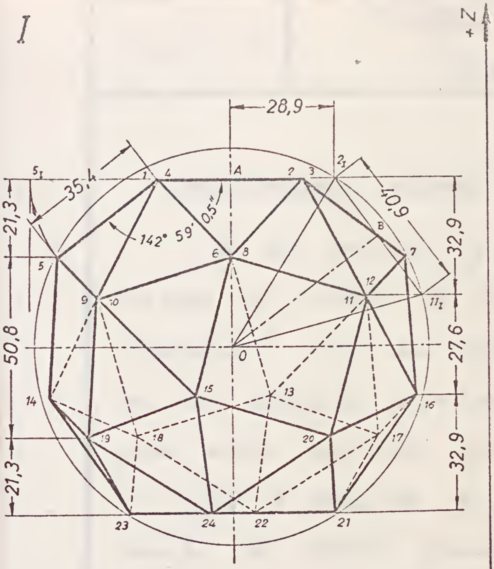
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

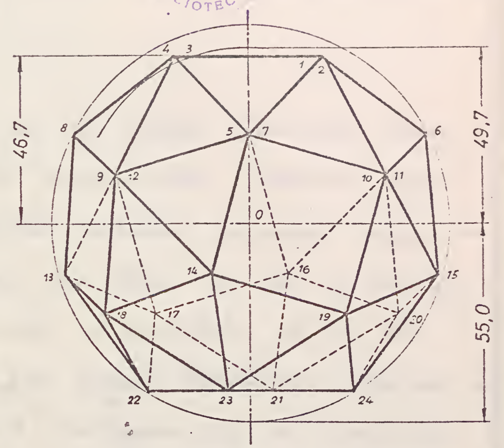
DATOS

O (72, 72, 85) mm

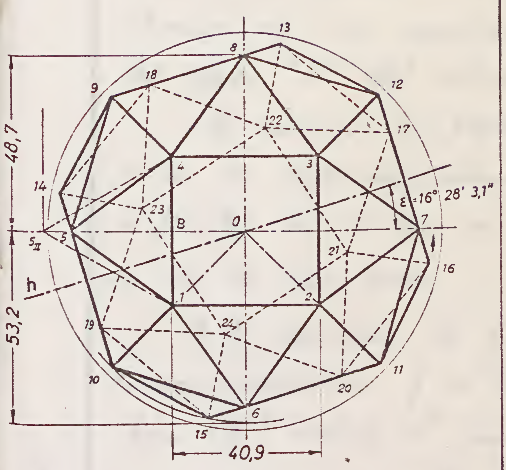
l_I = 40.9 mm.

		5 - 11 - 72





+X O +Y



ARQUIMEDIANO I

Número de caras triangulares	C_3 = 32
Número de caras cuadradas	C_4 = 6
Número de vértices	V = 24
Número de aristas	A = 60
Número de caras de un ángulo sólido:	$4C_3 + 1C_4$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano I, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un cuadrado.

La longitud de su lado es de 40,9 mm, y las coordenadas de su centro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Arquimediano I					Lámina 33

CONSIDERACIONES PREVIAS

En esta lámina y en las catorce siguientes vamos a realizar el estudio de los denominados "Poliedros arquimedianos" que son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares no todos iguales y sus ángulos sólidos son todos iguales o simétricos dos a dos.

En el desarrollo de este trabajo tendremos siempre en cuenta el estudio general realizado para estos poliedros, en el que se detalla los casos posibles de escistencia, propiedades geométricas y fórmulas generales para la obtención de sus principales magnitudes, en función del lado "l" del poliedro que se toma como dato.

El número de poliedros arquimedianos posibles es el de 13 tipos individuales, además de dos series infinitas en el que es variable el número "n" de lados de dos de sus caras.

A los primeros los hemos designado con cifras romanas sucesivas y a los segundos "Serie A_n" y "Serie "B_n" siendo "n" un entero mayor de 3 en la primera y mayor de 2 en la segunda.

Las fórmulas generales deducidas en el mencionado estudio y que aplicaremos a cada caso particular, son las siguientes:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} \qquad [1]$$

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} \qquad [2]$$

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad [3]$$

$$\varphi_{pq} = \alpha_p + \beta_q \qquad [4]$$

$$tg\ \alpha_p = \frac{2\, c_p}{\sqrt{4\,(d_p)^2 - l^2}} \qquad [5]$$

$$tg\ \alpha_q = \frac{2\, c_q}{\sqrt{4\,(d_q)^2 - l^2}} \qquad [6]$$

en las que:

l = Arista del poliedro arquimediano (dato del problema)
a = Radio de la esfera circunscrita
b = Radio de la esfera tangente a las aristas.
c_p = Radio de la esfera tangente a las caras regulares de "p" lados
c_q = Radio de la esfera tangente a las caras regulares de "q" lados.
φ_{pq} = Ángulo rectilíneo del diedro formado por la

cara regular de "p" lados con la de "q" lados.

d_p = Radio de la circunferencia ~~circunferencia~~ circunscrita a una cara de "p" lados.

d_q = Id. id. a una cara de "q" lados.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido

También obtendremos para cada caso particular

S = Superficie

V = Volumen.

Para la representación de cada arquimediano, nos valdremos principalmente de los valores obtenidos analíticamente por lo cual reduciremos el orden de exposición seguido en las láminas anteriores, limitándonos exclusivamente al "Proceso gráfico-analítico"

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que tiene 32 caras regulares triangulares y 6 caras cuadradas; 24 vértices y 60 aristas.

En cada vértice concurren 4 caras triangula-

res, 1 cara cuadrada y, por consiguiente, 5 aristas del mismo.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{Arquimediano I } (4\,P_3 + 1\,P_4);\ C_3 = 32;\ C_4 = 6;\ V = 24;\ A = 60}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cinco aristas de un ángulo poliedro.

Este polígono plano será un pentágono irregular (concurren en el vértice 4 triángulos equiláteros y un cuadrado) formado por cuatro lados iguales y uno desigual.

Los cuatro lados iguales tienen una longitud igual a la arista "l" (tercer lado de cada cara triangular regular) y el quinto tendrá una longitud igual a la diagonal del cuadrado de lado "l," o sea "$\sqrt{2}\,l$".

En la figura 1 se representa este polígono, que

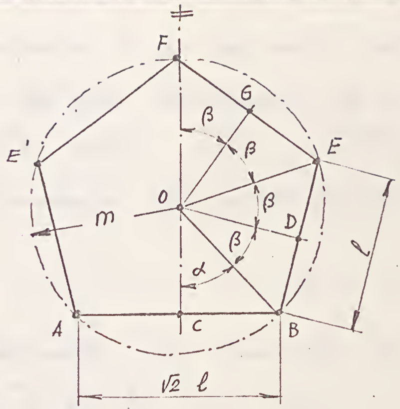


Figura 1

ha de estar inscrito en una circunferencia, cuyo radio "m" queremos determinar.

No existe solución gráfica exacta para este problema.

La solución analítica es la que estudiamos a continuación.

Suponiendo el problema resuelto* y refiriéndonos a la figura 1, sea O el centro de la circunferencia de radio "m" buscado (incógnita), en la cual está inscrito el pentágono A-B-E-F-E' que tiene 4 lados iguales $BE = EF = FE' = E'A = l$ y el quinto desigual $AB = \sqrt{2}\, l$.

De la figura se deduce que el pentágono tiene un eje de simetría F-O-C, mediatriz del lado mayor A-B.

Si unimos los vértices B y E con el centro O, se nos formarán los triángulos isósceles B-O-E y E-O-F iguales, cuyas alturas con respecto a sus bases B-E y E-F, nos determinarán los puntos D y G respectivamente, que

* La existencia de la circunferencia circunscrita al polígono, que se presupone, la demostraremos posteriormente.

uniremos a su vez con el centro O.

Así pues obtendremos el ángulo $\widehat{C \cdot O \cdot B} = \alpha$ y los $\widehat{B \cdot O \cdot D}$, $\widehat{D \cdot O \cdot E}$, $\widehat{E \cdot O \cdot G}$ y $\widehat{G \cdot O \cdot F}$ todos iguales, que denominaremos β, verificándose que

$$\alpha + 4\beta = 2\pi \qquad (1)$$

El radio "m" buscado se puede obtener en función de "β" y "l", ya que

$$OB = \frac{BD}{\operatorname{sen}\beta} \;:\; \text{o sea:} \quad m = \frac{l:2}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{l}{2\operatorname{sen}\beta} \qquad (2)$$

Para la determinación de "β" seguiremos el siguiente proceso de acuerdo con la fig. 1:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{2}\,l}{2}}{m} = \frac{\sqrt{2}\,l}{2m} \qquad (3)$$

por otra parte

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{BD}{OB} = \frac{\frac{l}{2}}{m} = \frac{l}{2m} \qquad (4)$$

y dividiendo (3) por (4)

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\sqrt{2}\,l}{2m} : \frac{l}{2m} = \sqrt{2} \qquad (5)$$

Pero siendo el ángulo "α" suplementario del "4β" se verificará que

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 4\beta \qquad (6)$$

teniendo en cuenta (5) y (6), escribiremos

$$\boxed{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \boxed{8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta} \qquad (7)$$

ecuación cúbica en "$\cos \beta$" cuya solución nos determinará el valor de "$\cos \beta$", con el cual obtendremos "$\operatorname{sen} \beta$" y finalmente "m" por la ecuación (2)

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} [2 \times (2\beta)]}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \times (2 \cos^2 \beta - 1)}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{8 \operatorname{sen} \beta \cos^3 \beta - 4 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \boxed{8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta}$$

Para resolver la ecuación cúbica (7), hagamos previamente $\cos \beta = x$, y escribiremos:

$$8x^3 - 4x = \sqrt{2}, \qquad \text{de donde } 8x^3 - 4x - \sqrt{2} = 0$$

y dividiendo por 8, tendremos

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0 \qquad (8)$$

que se puede transformar en la general

$$z^3 + pz + q = 0$$

haciendo $z = x$, $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

La fórmula de Cardano * nos permite obtener "z" real, siempre que se verifique que

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

lo cual sucede en este caso, ya que

$$\boxed{R} = \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{128} - \frac{1}{216} = \boxed{\frac{11}{3456}} > 0$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{R} = \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{2}{16^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{128} - \frac{1}{216} =$$

$$= \frac{2^3 \times 3^3 - 2^7}{2^{10} \times 3^3} = \frac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} = \boxed{\frac{11}{3456}} > 0$$

y por consiguiente:

$$\boxed{z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 - \sqrt{\frac{11}{3456}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \boxed{0,84\ 25\ 09\ 20 \ldots} = \cos\beta \qquad (9)$$

Desarrollo del cálculo anterior:

---

* Ver "Matemáticas para Ingenieros y Técnicos", de R. Doerfling, pag. 58.- Editorial Gustavo Gili, S. A, 1945.

UNE A4 210 X 297

$$z = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right):2 - \sqrt{\frac{11}{3456}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}}$$

$$\lg 2 = \underline{0,301\ 0300}$$

$$\frac{\lg 2}{2} = 0,150\ 5150$$

$$-\lg 16 = \underline{-1,204\ 1200}$$

$$\lg \frac{\sqrt{2}}{16} = \underline{\underline{\bar{2},946\ 3950}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{16} = 0,08\ 83\ 88\ 35}$$

$$\lg 11 = 1,041\ 3927$$

$$-\lg 3456 = \underline{-3,538\ 5737}$$

$$\bar{3},502\ 8190 =$$

$$= \underline{\underline{1,502\ 8190 - 4}}$$

$$\lg \sqrt{\frac{11}{3456}} = \frac{1,502\ 8190 - 4}{2} = 0,751\ 4095 - 2 = \bar{2},751\ 4095$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,05\ 64\ 16\ 94}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,08\ 83\ 88\ 35 + 0,05\ 64\ 16\ 94 = 0,14\ 48\ 05\ 29$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,08\ 83\ 88\ 35 - 0,05\ 64\ 16\ 94 = 0,03\ 19\ 71\ 41$$

$$\lg 0,14\ 48\ 05\ 29 = \bar{1},160\ 7845 = 2,160\ 7845 - 3$$

$$\lg 0,03\ 19\ 71\ 41 = \bar{2},504\ 7618 = 1,504\ 7618 - 3$$

$$\lg \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}+\sqrt{\frac{11}{3456}}} = \frac{\lg 0.14\ 48\ 05\ 29}{3} = \frac{2,160\ 7845\ -3}{3} =$$

$$= 0,720\ 26\ 15 - 1 = \bar{1},720\ 26\ 15$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}+\sqrt{\frac{11}{3456}}} = 0,52\ 51\ 23\ 54$$

$$\lg \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}-\sqrt{\frac{11}{3456}}} = \frac{\lg 0,03\ 19\ 71\ 41}{3} = \frac{1,504\ 7618-3}{3} =$$

$$= 0,501\ 5873 - 1 = \bar{1},501\ 5873$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}-\sqrt{\frac{11}{3456}}} = 0,31\ 73\ 85\ 66$$

$$\boxed{\cos\beta} = \begin{array}{r} 0,52\ 51\ 23\ 54 \\ +\ 0,31\ 73\ 85\ 66 \\ \hline \boxed{0,84\ 25\ 09\ 20} \end{array}$$

Los dos valores restantes de la ecuación cúbica (8), son imaginarios.

Del valor $\cos\beta = 0,84\ 25\ 09\ 20 \ldots$ se deduce

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-0,84\ 25\ 09\ 20^2} = 0,53\ 86\ 81\ 90\ldots \quad (10)$$

y de éste

$$\beta = 32°\ 35'\ 38,2''$$

Comprobación numérica de la raiz real

Vamos a comprobar numéricamente si la raiz real obtenida para la ecuación (8), la verifica. Dicha raiz es

$$x = \cos\beta = 0{,}84\ 25\ 09\ 20\ldots$$

siendo la ecuación: $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0$ o sea

$$x^3 - \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}17\ 67\ 76\ 70\ldots$$

$$x^2 = 0{,}84\ 25\ 09\ 20^2 = \begin{array}{r} 0{,}70\ 98\ 14\ 00\ 10\ 00\ 00\ 00 \\ +\quad 7\ 75\ 10\ 84\ 64\ 00 \\ \hline 0{,}70\ 98\ 21\ 75\ 20\ 84\ 64\ 00 \end{array}$$

$$x^3 = 0{,}70\ 98\ 21\ 75 \times 0{,}84\ 25\ 09\ 20 =$$

$$= \begin{array}{r} 0{,}59\ 80\ 24\ 82\ 43\ 75\ 00\ 00 \\ +\quad 6\ 53\ 03\ 60\ 10\ 00 \\ \hline 0{,}59\ 80\ 31\ 35\ 47\ 35\ 10\ 00 \end{array}$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x = \begin{array}{r} 0{,}59\ 80\ 31\ 35 \\ -\ 0{,}42\ 12\ 54\ 60 \\ \hline 0{,}17\ 67\ 76\ 75\ldots \end{array} \cong \frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}17\ 67\ 76\ 70$$

cuyo resultado nos comprueba la exactitud hasta la cifra 10^{-7}.

Comprobado el resultado numérico de $\cos\beta = 0{,}84\ 25\ 07\ 20\ldots$ que nos confirma el de la fórmula (10)

$$\operatorname{sen}\beta = 0{,}53\ 86\ 81\ 90$$

llegaremos al resultado final del valor "m", según la fórmula (2)

$$\boxed{m} = \frac{l}{2\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{2\times 0{,}53\ 86\ 81\ 90}\, l = \boxed{0{,}92\ 81\ 91\ 57\ldots l}$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Aplicando la fórmula general [1], tendremos:

$$\boxed{a} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-(0{,}92\ 81\ 91\ 57\ldots l)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-0{,}92\ 81\ 91\ 57^2}}\, l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{0{,}13\ 84\ 60\ 40\ 93\ 80\ 93\ 51}}\, l = \frac{1}{2\times 0{,}37\ 21\ 02\ 68}\, l =$$

$$= \boxed{1{,}34\ 37\ 15\ 13 \ldots\ldots l}$$

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3], tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2-\frac{l^2}{4}} = \sqrt{(1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots l)^2-\frac{l^2}{4}} = \sqrt{1{,}34\ 37\ 15\ 13^2-0{,}25}\ \ l =$$

$$\sqrt{1,80\ 55\ 70\ 35\ 05\cdot 90\ 91\ 69 - 0,25} \times \ell = \sqrt{1,55\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69} \times \ell =$$

$$= \boxed{1,24\ 72\ 25\ 06\ldots\ \ell}$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular regular de lado "ℓ".

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell}$$

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría es:

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell}$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2], tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(1,34\ 37\ 15\ 13\ldots\ell)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1,34\ 37\ 15\ 13^2 - \frac{1}{3}} \times \ell = \sqrt{1,80\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69 - \frac{1}{3}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{1,47\ 22\ 37\ 01\ 72\ 57\ 58\ 36} \cdot l = \boxed{1,21\ 33\ 57\ 74 \ldots\, l}$$

Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2], tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{(1,34\ 37\ 15\ 13 \ldots\, l)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1,34\ 37\ 15\ 13^2 - \frac{1}{2}}\; l = \sqrt{1,80\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69 - 0,5}\; l =$$

$$= \sqrt{1,30\ 55\ 70\ 35\ 05\ 90\ 91\ 69}\; l = \boxed{1,14\ 26\ 15\ 57 \ldots\, l}$$

Ángulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [5]:

$$\operatorname{tg}\ \alpha_3 = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - l^2}} = \frac{2 \times 1,21\ 33\ 57\ 74 \ldots\, l}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, l\right)^2 - l^2}} = \frac{2 \times 1,21\ 33\ 57\ 74}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}} =$$

$$= \frac{2 \times 1,21\ 33\ 57\ 74}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2,42\ 67\ 15\ 48 \times \sqrt{3} = 4,20\ 31\ 94\ 51 \ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 0,623\ 57\ 95$ $\boxed{\alpha_3 = 76^\circ\ 37'\ 2,3''}$

Ángulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [6]

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{2 c_4}{\sqrt{4 (d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1,14\ 26\ 15\ 57 \ldots \ell}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ell\right)^2 - \ell^2}} =$$

$$= \frac{2 \times 1,14\ 26\ 15\ 57 \ldots}{\sqrt{2-1}} = 2,28\ 52\ 31\ 14 \ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_4 = 0,358\ 9301$ $\boxed{\alpha_4 = 66^\circ\ 21'\ 58,2''}$

Ángulo rectilíneo "φ_{3-3}" del diedro formado por dos caras triangulares

Aplicando la fórmula general [4]

$$\boxed{\varphi_{3-3}} = 2\ \alpha_3 = 2 \times (76^\circ\ 37'\ 2,3'') = \boxed{153^\circ\ 14'\ 4,6''}$$

Ángulo rectilíneo "φ_{3-4}" del diedro formado por una cara triangular y una cuadrada

Aplicando la fórmula general [4]

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 76^\circ\ 37'\ 2{,}3'' + 66^\circ\ 21'\ 58{,}2''$$

$$= \boxed{142^\circ\ 59'\ 0{,}5''}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de 32 caras triangulares y 6 cuadradas, ambas de lado "l"; la superficie total será:

$$\boxed{S} = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 6\, l^2 = (8\sqrt{3} + 6)\, l^2 = \boxed{19{,}85\ 64\ 06\ 46 \ldots l^2}$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 32 pirámides de base triangular y altura c_3, y de 6 pirámides de base cuadrada y altura c_4; su valor será

$$\boxed{V} = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{1{,}21\ 33\ 57\ 74 \ldots l}{3} + 6 \times l^2 \times \frac{1{,}14\ 26\ 15\ 57 \ldots l}{3} =$$

$$= \boxed{7{,}88\ 74\ 90\ 48 \ldots l^3}$$

Lámina 33	Poliedros arquimedianos Arquimediano I	Hoja nº 17

Desarrollo del cálculo anterior:

$$V = \left[\frac{32\sqrt{3}}{4} \times \frac{1,21\ 33\ 57\ 74}{3} + \frac{6}{3} \times 1,14\ 26\ 15\ 57 \right] l^3$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{3} = 4,61\ 88\ 02\ 15\ ;$$

$$4,61\ 88\ 02\ 15 \times 1,21\ 33\ 57\ 74 = 5,60\ 42\ 59\ 34$$

$$+\ 2 \times 1,14\ 26\ 15\ 57 = 2,28\ 52\ 31\ 14$$

$$7,88\ 94\ 90\ 48$$

		8 - 11 - 72

En el cuadro sinóptico que presentamos a continuación, resumimos los resultados anteriores

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\dfrac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}}$	$1{,}34\ 37\ 15 \ldots\ \ell$
b	$\sqrt{a^2 - \dfrac{\ell^2}{4}}$	$1{,}24\ 72\ 25 \ldots\ \ell$
c_3	$\sqrt{a^2 - (d_3)^2}$	$1{,}21\ 33\ 58 \ldots\ \ell$
c_4	$\sqrt{a^2 - (d_4)^2}$	$1{,}14\ 26\ 16 \ldots\ \ell$
d_3	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0{,}57\ 73\ 50 \ldots\ \ell$
d_4	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$0{,}70\ 71\ 07 \ldots\ \ell$
m	$\dfrac{1}{2\ \mathrm{sen}\ \beta}\ \ell$	$0{,}92\ 81\ 92 \ldots\ \ell$
α_3	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = \dfrac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = 2{,}42\ 67\ 15$ $\alpha_3 = 76^\circ\ 37'\ 2{,}3''$
α_4	$\mathrm{tg}\ \alpha_4 = \dfrac{2c_4}{\sqrt{4(d_4)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_4 = 2{,}28\ 52\ 31$ $\alpha_4 = 66^\circ\ 21'\ 58{,}2''$
φ_{3-3}	$\alpha_3 + \alpha_3$	$\varphi_{3-3} = 153^\circ\ 14'\ 4{,}6''$
φ_{3-4}	$\alpha_3 + \beta_4$	$\varphi_{3-4} = 142^\circ\ 59'\ 0{,}5''$
S	$(8\sqrt{3} + 6)\ \ell^2$	$19{,}85\ 64\ 06 \ldots\ \ell^2$
V	$\left(32 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{c_3}{3} + 6 \times \dfrac{c_4}{3}\right) \ell^2$	$7{,}88\ 94\ 90 \ldots\ \ell^3$
β	$\cos\beta = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\dfrac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\dfrac{11}{3456}}}$	$\cos\beta = 0{,}84\ 25\ 09 \ldots$ $\beta = 32^\circ\ 35'\ 38{,}2''$
	$\mathrm{sen}\ \beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$	$\mathrm{sen}\ \beta = 0{,}53\ 86\ 82 \ldots$

Después del cálculo de magnitudes, vamos a proceder a la representación gráfica del arquimediano I, de lado dado.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo justificaremos debidamente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado l_I del arquimediano, de 40,9 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

$$l_I = \qquad = 40,9 \text{ mm}$$
$$a = 1,34\,37\,15 \times 40,9 = 55,0 \text{ mm}$$
$$b = 1,24\,72\,25 \times 40,9 = 51,0 \text{ mm}$$
$$c_3 = 1,21\,33\,58 \times 40,9 = 49,7 \text{ mm}$$
$$c_4 = 1,14\,26\,16 \times 40,9 = 46,7 \text{ mm}$$
$$d_4 = 0,70\,71\,07 \times 40,9 = 28,9 \text{ mm}$$

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 33) es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas 73, 72, 85

2º Dibujar en I, II, y III la esfera circunscrita de radio a = 55 m.

3º Representar en I, II y III la cara cuadrada 1-2-3-4, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y dos lados (1-4, 2-3) perpendiculares a I.

Lámina 33	Poliedros arquimedianos Arquimediano I	Hoja nº 19

4º Obtener en I, II y III las proyecciones del vértice 5 de la cara contigua triangular de arista 1-4 (perpendicular a II), por giro alrededor de 1-4 hasta colocar el vértice 5 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en 1_I, con radio igual a la altura de la cara 1-4-5, y se trazará un arco que corte en 5_I a la esfera circunscrita.

5º Determinar las proyecciones en II y III de dicho vértice 5, y seguidamente en I, II y III las de los vértices 6, 7 y 8. (Los vértices 5, 6, 7, y 8 son los de un cuadrado paralelo al II).

6º Determinar las proyecciones en I y II de la arista 2-11, por giro de la misma alrededor del eje perpendicular a II que pase por el centro O, hasta colocarla paralela a I. (Los puntos 2_I y 11_I están sobre la esfera circunscrita y el segmento 2_I-11_I es la arista. Obsérvese también que la arista 2-11 en la proyección II, pasa por O_{II}).

7º Determinar la proyección en III del punto 11, y seguidamente en I, II y III las de los vértices 9, 10, 12. (Los vértices 9, 10, 11 y 12 son los de un cuadrado paralelo a II).

8º Trazar en II el eje "h" que forma con el 5-7 (paralelo este último al X) un ángulo $\varepsilon = 16^\circ 28' 3{,}1''$ ($\operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}29\ 55\ 97$)

9º Los restantes vértices del poliedro 13 al 24 son simétricos en II con respecto a dicho eje "h", por

		17-11-72

lo que su situación en II es inmediata. Uniendo debidamente todos los vértices y estudiando la visibilidad de las aristas correspondientes, podremos representar en II la proyección total del poliedro.

10° Para completar la representación en I y III del poliedro, basta tener en cuenta que los vértices 13 al 16 están situados sobre un plano paralelo al de los vértices 9 al 12 y equidistantes del diametral paralelo a II. Igualmente ocurre con los vértices 17 al 20 con respecto a los 5 al 8, así como los 21 al 24 con respecto a los 1 al 4.

Como comprobación al trazado gráfico dado anteriormente vamos a determinar analíticamente las siguientes cotas complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado.

<u>Altura "n" de una cara triangular</u>

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0{,}86\ 60\ 25 \ldots\ l$$

Para el caso del dibujo será $n = 0{,}86\ 60\ 254 \times 40{,}9 = 35{,}4$ mm.

<u>Distancia "g_1" de los vértices 5 al 8 al plano de la cara cuadrada 1-2-3-4, y de los 17 al 20 a la cara ma-</u>

Lámina 33	Poliedros arquimedianos Arquimediano I	Hoja nº 21

drada opuesta 20 al 24

Se obtiene proyectando la altura "h" sobre el plano III; el ángulo de proyección es de

$$\varphi_{3-4} - \frac{\pi}{2} = 142^\circ\ 59'\ 0,5'' - 90^\circ = 52^\circ\ 59'\ 0,5''$$

$$\boxed{g_1} = h \times \cos 52^\circ\ 59'\ 0.5'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 52^\circ\ 59'\ 0,5'' \times l =$$

$$= \boxed{0,52\ 13\ 86\ 5 \times l}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{1}{2} \log 3 = \frac{1}{2} \times 0,477\ 12\ 13 = \text{———} \quad 0,238\ 56\ 07$$

$$+ \quad \lg. \cos 52^\circ\ 59'\ 0.5'' = \text{———} \quad \bar{1},779\ 62\ 92 \quad +$$

$$0,018\ 18\ 99$$

$$- \quad \lg 2 = \text{———} \quad 0,301\ 03\ 00 \quad -$$

$$\lg \boxed{0,52\ 13\ 86\ 5} = \bar{1},717\ 15\ 99$$

Para el caso del dibujo será: $g_1 = 0.52\ 13\ 86\ 5 \times 40,9 = 21,3$ mm.

Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 5 al 8, y 17 al 20 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_4" y "g_1", ya calculadas;

$$\boxed{f_1} = 2\ (c_4 - g_1) = 2 \times (1,\ 14\ 26\ 15\ 6 - 0,52\ 13\ 86\ 5) \times l =$$

$= \boxed{1,2424582\ldots\ l}$

Para el caso particular del dibujo, será: $f_1 = 1,2424582 \times 40,9 = 50,8$ mm.

<u>Distancia "g_2" de los vértices 9 al 12 al plano de la cara cuadrada 1-2-3-4, y de los 17 al 20 a la cara cuadrada opuesta 20 al 24.</u>

Se obtiene girando previamente la arista 2-11 hasta colocarla paralelamente al plano I, y proyectarla seguidamente sobre el plano III.

Para calcularla, determinemos previamente el ángulo de proyección de dicha arista.

Si consideramos el plano diametral que pasa por 2-11 y el centro O del poliedro, dicho plano pasará a su vez por el centro de la cara cuadrada 1 al 4; uniendo ambos centros tendremos determinado el eje de giro de dicha arista 2-11, el cual será perpendicular a II; los puntos 2 y 11 en II, pasarán a ocupar, después del giro, las posiciones 2_I y 11_I en I, y la arista $2_I - 11_{II}$ estará proyectada en I en su verdadera magnitud.

Uniendo a continuación 2_I y 11_I con el centro O del poliedro, se nos formará el triángulo isósceles $O - 2_I - 11_I$, de base "l", altura "b" y lado "a" (fig. 2)

Lámina 33	Poliedros arquimedianos Arquimediano I	Hoja nº 23

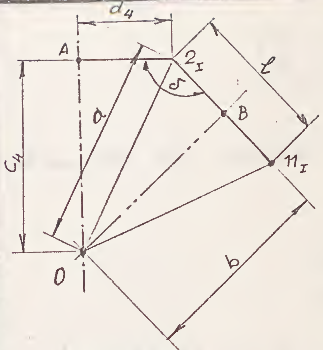


Figura 2

Este triángulo será contiguo al $0 \cdot A \cdot 2_I$, rectángulo en A, de catetos "c_4", "d_4" e hipotenusa "a".

El ángulo $\widehat{A \cdot 2_I \cdot 11_I}$ es el que forma la arista "ℓ" con el plano de la cara cuadrada 1 al 4, siendo

$$\delta = \widehat{A - 2_I - 11_I} = \widehat{A - 2_I - 0} + \widehat{0 - 2_I - B} \quad \text{de donde}$$

$$\cos\left(\widehat{A - 2_I - 0}\right) = \frac{d_4}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell}{\frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}}} = \frac{0{,}70\ 71\ 06\ 78\ldots}{1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots} = 0{,}52\ 62\ 32\ 65\ldots$$

$$\boxed{\measuredangle\ A - 2_I - 0 = 58^\circ\ 14'\ 55{,}5''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\begin{aligned} \lg 0{,}70\ 71\ 06\ 78\ldots &= \bar{1},849\ 48\ 50 \\ -\ \lg 1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots &= -0,128\ 30\ 72 \\ \hline \lg\cos\left(\widehat{A - 2_I - 0}\right) &= \bar{1},721\ 17\ 78 \end{aligned}$$

$$\boxed{\measuredangle\ A - 2_I - 0 = 58^\circ\ 14'\ 55{,}5''}$$

y por otra parte

$$\cos\left(0 - 2_I - B\right) = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} = \frac{\ell}{2a} = \frac{\ell}{2 \times \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}}} = \frac{1}{2 \times 1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots}$$

$$= \frac{1}{2{,}68\ 74\ 30\ 26} = 0{,}37\ 21\ 02\ 68\ldots$$

[signature]		29 - 11 - 72

UNE A4 210 X 297

$$\boxed{\sphericalangle\ 0 - 2_I - B = 68^\circ\ 9'\ 16{,}7''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg 1 \qquad\qquad\qquad = 0{,}000\ 00\ 00$$

$$\lg 2 = 0{,}301\ 03\ 00$$

$$+ \lg 1{,}34\ 37\ 15\ 13\ldots \quad = \underline{0{,}128\ 30\ 72} \quad = \underline{-0{,}429\ 33\ 72}$$

$$\lg \cos\left(\widehat{0 - 2_I - B}\right) = \bar{1}{,}570\ 66\ 28$$

$$\sphericalangle\ 0 - 2_I - B = 68^\circ\ 9'\ 16{,}7''$$

y por lo tanto tendremos que

$$\boxed{\delta} = \sphericalangle\ A - 2_I - 11_I = 58^\circ\ 14'\ 55{,}5'' + 68^\circ\ 9'\ 16{,}7'' =$$

$$= \boxed{126^\circ\ 24'\ 12{,}2''}$$

Si proyectamos la arista $2_I - 11_I$ sobre el plano III, el ángulo de proyección será:

$$126^\circ\ 24'\ 12{,}2'' - 90^\circ = 36^\circ\ 24'\ 12{,}2''$$

por lo que finalmente tendremos:

$$\boxed{g_2} = l \cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2'' = \boxed{0{,}80\ 48\ 58\ 89\ldots\ l}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg \cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2'' = \bar{1}{,}905\ 71\ 97$$

$$\boxed{\cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2''} = \text{Antilg } \bar{1}{,}905\ 71\ 97 = \boxed{0{,}80\ 48\ 58\ 89\ldots}$$

Para el caso particular del dibujo, será:

$$j = 0,80\ 48\ 58\ 89 \times 40,9 = 32,9 \text{ mm.}$$

<u>Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 9 al 12 y 13 al 16 respectivamente.</u>

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_4" y "j", ya calculadas

$$\boxed{f_2} = 2\,(c_4 - j) = 2 \times (1,14\ 26\ 15\ 6\ldots - 0,80\ 48\ 58\ 9\ldots)\ l =$$

$$= \boxed{0,67\ 55\ 13\ 4\ldots\ l}$$

Para el caso particular del dibujo, será: $i = 0,67\ 55\ 134 \times 40,9 = 27,6$ mm

---

<u>Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita a los cuadrados de vértices 5 al 8 y 17 al 20.</u>

Está representado en su verdadera magnitud, en el plano II, por el segmento 5-0, suma del 5-B y del B-0. Sus valores son:

$$\left.\begin{array}{l} 5\text{-}B = n \times \text{sen } 52^\circ\ 59'\ 0,5'' \quad (\text{ver cálculo de "}g_1\text{"}) \\ B\text{-}0 = \dfrac{l}{2} \end{array}\right\}\ \text{de donde}$$

$$\boxed{r_1} = n \text{ sen } 52^\circ\ 59'\ 0,5'' + \frac{l}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{sen } 52^\circ\ 59'\ 0,5'' + \frac{1}{2}\right) \times l =$$

$= \boxed{1.19\ 14\ 88\ 4\ldots\ l}$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{1}{2} \lg 3 = \frac{1}{2} \times 0{,}477\ 12\ 13 = 0{,}238\ 56\ 07$$

$$+ \quad \lg \operatorname{sen} 52^\circ\ 57'\ 0{,}5'' = \bar{1}{,}902\ 25\ 42$$

$$0{,}140\ 81\ 49$$

$$- \lg 2 = -0{,}301\ 03\ 00$$

$$\text{Antilog}\ \bar{1}{,}839\ 78\ 49 = 0{,}69\ 14\ 88\ 4\ldots$$

$$\boxed{r_1} = (0{,}69\ 14\ 88\ 4\ldots + 0{,}5)\,l = \boxed{1{,}19\ 14\ 88\ 4\ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1.19\ 14\ 88\ 4 \times 40{,}9 = 48{,}7$ mm

---

Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita a los cuadrados de vértices 9 al 12 y 13 al 16.

Está representado en su verdadera magnitud, en el plano II, por el segmento 11-0, suma del 0-2 y del 2-11. Sus valores son:

$$\left.\begin{array}{l} 0\text{-}2 = d_4 \times l = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, l \\ 2\text{-}11 = l \operatorname{sen} 36^\circ\ 24'\ 12{,}2'' \text{ (ver cálculo de "}j\text{")} \end{array}\right\}\ \text{de donde}$$

$$\boxed{r_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} 36^\circ\ 24'\ 12{,}2''\right) l = (0{,}70\ 71\ 06\ 8 + 0{,}59\ 34\ 66\ 4)\, l$$

$= \boxed{1{,}30\ 05\ 73\ 2\ldots\ l}$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\frac{1}{2} \lg 2 = \frac{1}{2} \times 0{,}301\ 03\ 00 \quad = 0{,}150\ 51\ 50$

$- \lg 2 = \quad\quad = -0{,}301\ 03\ 00$

Antilog $\bar{1}{,}849\ 48\ 50 = 0{,}70\ 71\ 06\ 8\ldots$

$\lg$ sen $36°\ 24'\ 12{,}2'' = \bar{1}{,}\ 77\ 33\ 96\ 2$

Antilog $\bar{1}{,}\ 77\ 33\ 96\ 2\ldots = 0{,}59\ 34\ 66\ 4\ldots$

$\boxed{r_2} = (0{,}70\ 71\ 06\ 8\ldots + 0{,}59\ 34\ 66\ 4\ldots)\ l = \boxed{1{,}30\ 05\ 73\ 2\ldots\ l}$

Para el caso del dibujo, será: $r_2 = 1{,}30\ 05\ 73\ 2 \times 40{,}9 = 53{,}2$ mm

---

Angulo "ε" que forma el eje de simetría "h", en la proyección II, con el eje paralelo a "X"

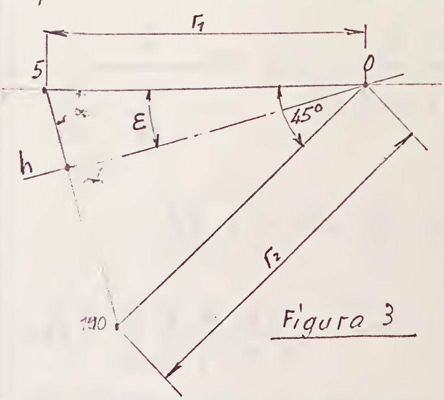


Figura 3

Refiriéndonos a la proyección II, el triángulo 5-0-10 (fig. 3), tiene los valores ya calculados $5\text{-}0 = r_1$, $10\text{-}0 = r_2$, y el ángulo que forman estos lados, es de 45°.

La altura $\underline{0A}$ de este triángulo, correspondiente a "0", es el eje "h" buscado, que forma el ángulo "ε" con el lado 5.0.

En la resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se obtiene otro de sus ángulos por la fórmula

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{b - a\cos\gamma}$$

que aplicada al caso particular de la fig. 3, haciendo

$a = r_2$; $b = r_1$; $\gamma = 45^\circ$ y $\alpha = \widehat{0\text{-}5\text{-}10}$, y

teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

y que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varepsilon$, tendremos

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{r_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{r_1 - r_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\dfrac{r_1}{r_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} - 1} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{r_1}{r_2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \dfrac{r_1}{r_2} - 1}$$ y de aquí:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varepsilon} = \sqrt{2} \times \frac{r_1}{r_2} - 1 = \sqrt{2} \times \frac{1{,}19\ 14\ 88\ 4 \ldots l}{1{,}30\ 05\ 73\ 2 \ldots l} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1{,}19\ 14\ 88\ 4}{1{,}30\ 05\ 73\ 2} - 1 = \boxed{0{,}29\ 55\ 97\ 3 \ldots}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\varepsilon = 16^\circ\ 28'\ 3.1''}$$

UNE A4 210 X 297

$\frac{1}{2}$ lg. $2 = \frac{1}{2} \times 0{,}301\ 03\ 00 = 0{,}150\ 51\ 50$

$+$ lg. $1{,}19\ 14\ 88\ 4 = 0{,}076\ 08\ 98\ +$

$0{,}226\ 60\ 48$

$-$ lg. $1{,}30\ 05\ 73\ 2 = 0{,}114\ 13\ 48\ -$

Antilog $0{,}112\ 47\ 00 = 1{,}29\ 55\ 97\ 3\ldots$

$\boxed{\operatorname{tg} \varepsilon} = 1{,}29\ 55\ 97\ 3 - 1 = \boxed{0{,}29\ 55\ 97\ 3}$

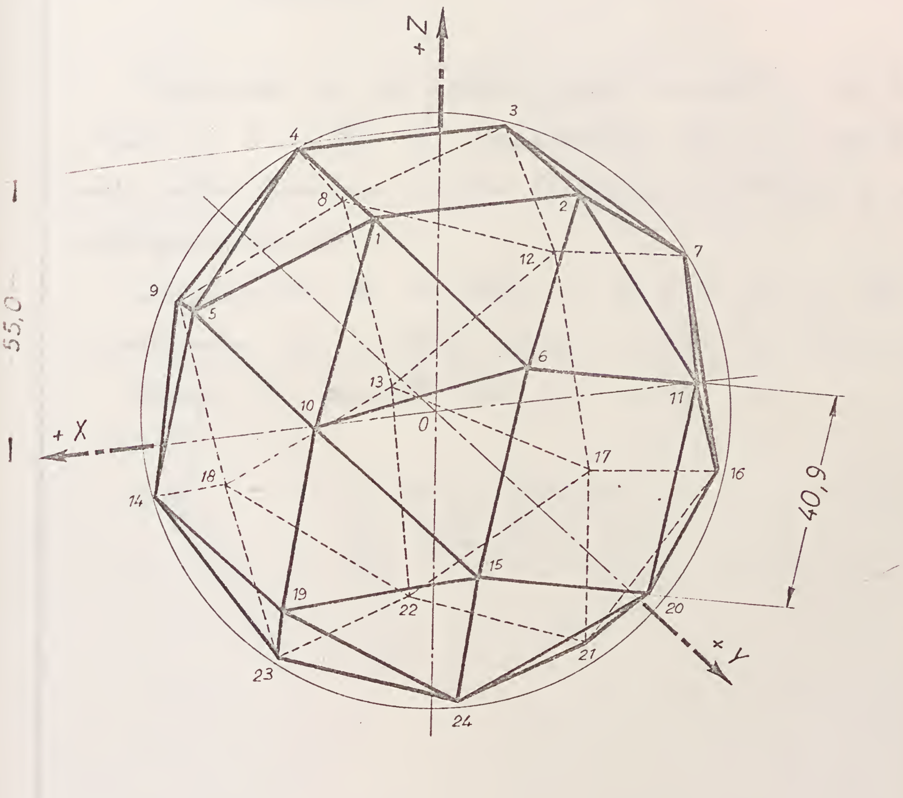
$\lg \operatorname{tg} \varepsilon = \bar{1}{,}470\ 70\ 04$ $\boxed{\varepsilon = 16^\circ\ 28'\ 3{,}1''}$

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ l$	$0{,}86\ 60\ 25\ldots\ l$
f_1	$2\ (c_4 - g_1)$	$1{,}24\ 24\ 58\ldots\ l$
g_1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 52^\circ 59' 0{,}5'' \times l$	$0{,}52\ 13\ 87\ldots\ l$
f_2	$2\ (c_4 - g_2)$	$0{,}67\ 55\ 13\ldots\ l$
g_2	$\cos 36^\circ\ 24'\ 12{,}2'' \times l$	$0{,}80\ 48\ 59\ldots\ l$
r_1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 52^\circ 59' 0{,}5'' + \frac{1}{2}\right) \times l$	$1{,}19\ 14\ 88\ldots\ l$
r_2	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} 36^\circ 24' 12{,}2''\right) \cdot l$	$1{,}30\ 05\ 73\ldots\ l$
ε	$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{2} \times \frac{r_1}{r_2} - 1$	$\operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}29\ 55\ 97$ $\varepsilon = 16^\circ\ 28'\ 3{,}1''$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 32 triángulos equiláteros y 6 cuadrados, de lado 40.9 mm. de forma que en cada vértice concurran 4 triángulos y 1 cuadrado



Arquimediano I

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II · ($4 P_3 + 1 P_5$)	34

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano II, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un pentágono regular.

La longitud de su lado es de 25,5 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

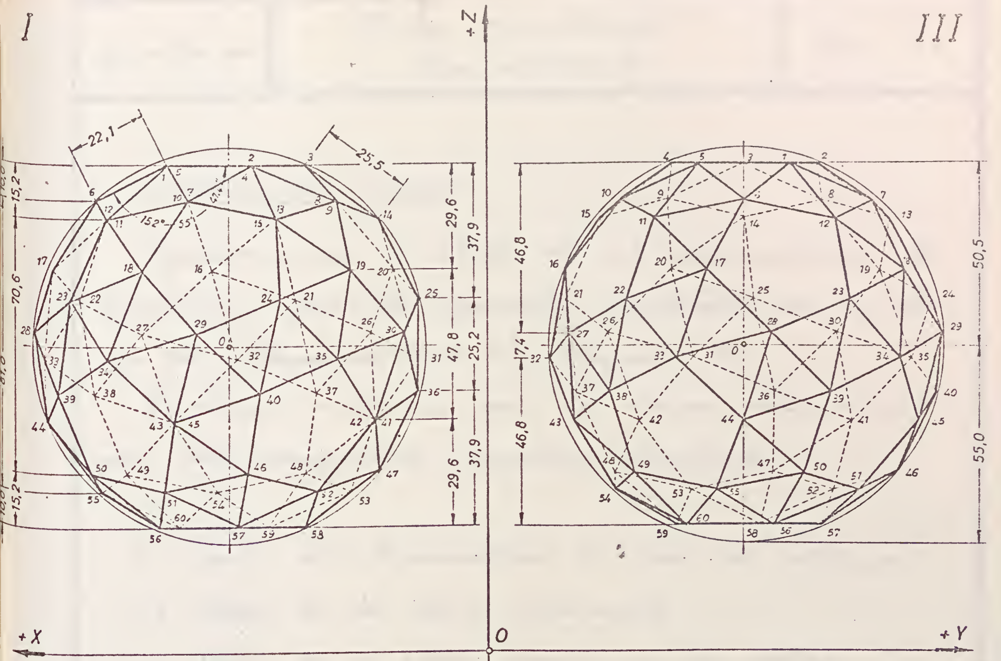
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

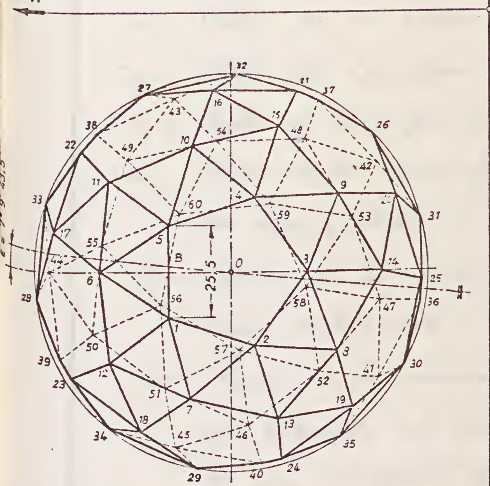
DATOS: O (72, 72, 85) mm

l_{II} = 25,5 mm.

[signature]		6 - 12 - 72

UNE A4 210 X 297





ARQUIMEDIANO II

Número de caras triangulares.......... C_3 = 80
Número de caras pentagonales.......... C_5 = 12
Número de vértices.......... V = 60
Número de aristas.......... A = 150
Número de caras de un ángulo sólido: $4C_3 + 1C_5$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el Arquimediano II, en el que en cada vértice concurren cuatro triángulos equiláteros y un pentágono regular.

La longitud de su lado es de 25,5 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso:
Alumno:						

Escala	Arquimediano II	Lámina 34
1:1		Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos, en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes generales siguientes:

l = Arista del Arquimediano II (dato del problema)

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los estremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquella.

α_5 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arqui-

mediano, que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-3} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras triangulares.

φ_{3-5} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra pentagonal

S = Superficie

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que tiene 80 caras regulares triangulares, y 12 caras regulares pentagonales; 60 vértices y 150 aristas.

En cada vértice concurren 4 caras triangulares, 1 cara pentagonal y, por consiguiente, 5 aristas del mismo.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{Arquimediano II } (4\,P_3 + 1\,P_5);\ C_3 = 80;\ C_5 = 12;\ V = 60;\ A = 150}$$

—

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

—

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cinco aristas de un ángulo poliedro.

Este polígono será un pentágono irregular (concurren en el vértice 4 triángulos equiláteros y un pentágono) formado por cuatro lados iguales y uno desigual.

Los cuatro lados iguales tienen una longitud igual a la arista "ℓ" (tercer lado de una cara triangular regular) y el quinto tendrá una longitud igual a la diagonal de un pentágono regular de lado "ℓ".

Su valor será pues:

$$AB = a = \ell \, \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

y la relación $\quad \dfrac{a}{\ell} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Siguiendo el mismo proceso de cálculo desarrollado en la lámina 33 para la determinación de "m" en el Arquimediano I, y refiriéndonos a la misma figura 1, tendremos que

$$m = \frac{\ell}{2 \operatorname{sen}\beta} \qquad (1)$$

en la que $\operatorname{sen}\beta$ se deduce en función de $\cos\beta$, que es a su vez la solución real de la ecuación cúbica

$$8\cos^3\beta - 4\cos\beta = \frac{a}{\ell} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad (2)$$

UNE A4 210 X 297

para el caso particular que nos ocupa.

Haciendo en (2) $\cos\beta = x$, tendremos

$$8x^3 - 4x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad ,, \quad 8x^3 - 4x - \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 0$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0 \qquad (3)$$

que se puede transformar, haciendo $p = -\frac{1}{2}$ y $q = -\frac{\sqrt{5}+1}{16}$, en la general

$$x^3 + px + q = 0$$

La fórmula de Cardano nos permite obtener "z" real, siempre que se verifique que

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0 .$$

lo cual sucede en este caso, ya que

$$\boxed{R} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{3+\sqrt{5}}{512} - \frac{1}{216} = \boxed{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824} > 0}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{R} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{5+1+2\sqrt{5}}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{3+\sqrt{5}}{16 \times 32} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{3+\sqrt{5}}{2^9} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$$

$$= \frac{2^3 \times 3^4 + 2^3 \times 3^3 \times \sqrt{5} - 2^9}{2^{12} \times 3^3} = \frac{3^4 + 3^3\sqrt{5} - 2^6}{2^9 \times 3^3} = \boxed{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824} > 0}$$

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II	Hoja nº 5

y por consiguiente:

$$\boxed{z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) - \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} - \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13.824}}} =$$

$$= 0,56\ 03\ 44\ 87\ldots + 0,29\ 74\ 35\ 82\ldots = \boxed{0,85\ 77\ 80\ 69\ldots} = \cos\beta$$

0,85 77 80 74 99...

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{32} = \frac{3,23\ 60\ 67\ 97\ 74\ 99\ 79.}{32} = 0,10\ 11\ 27\ 12\ 42\ 96\ 87$$

$$\frac{17+27\sqrt{5}}{13.824} = \frac{17+60,37\ 38\ 35\ 39\ 24\ 94\ 33}{13.824} = 0,00\ 55\ 97\ 06\ 56\ 38\ 92$$

$$\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}} = \sqrt{0,00\ 55\ 97\ 06\ 56\ 38\ 92} = 0,07\ 48\ 13\ 54\ldots$$

$$z = \sqrt[3]{0,17\ 59\ 40\ 66} + \sqrt[3]{0,02\ 63\ 13\ 58}$$

$$\lg 0.17\ 59\ 40\ 66 = \bar{1},245\ 3662 = 2,245\ 3662 - 3$$

$$\frac{1}{3}\lg 0,17\ 59\ 40\ 66 = \frac{1}{3}\times(2,245\ 3662 - 3) = 0,748\ 4554 - 1 = \bar{1},748\ 4554$$

$$\sqrt[3]{0,17\ 59\ 40\ 66} = \text{Antilog. } \bar{1},748\ 4554 = 0,56\ 03\ 44\ 87\ldots$$

$$\lg.\ 0,02\ 63\ 13\ 58 = \bar{2},420\ 18\ 00 = 1,420\ 18\ 00 - 3$$

$$\frac{1}{3}\lg 0,02\ 63\ 13\ 58 = \frac{1}{3}(1,420\ 18\ 00 - 3) = 0,473\ 3933 - 1 = \bar{1},473\ 3933$$

CE		17 . 12 . 72

$$\sqrt[3]{0{,}02\ 63\ 13\ 58} = \text{Antilog.}\ \bar{1},473\ 3933 = 0,29\ 74\ 35\ 82\ldots$$

$$\cos\beta = \boxed{z} = 0,50\ 03\ 44\ 87 + 0,29\ 74\ 35\ 82 = \boxed{0,85\ 77\ 80\ 69\ldots}$$

$$\lg\cos\beta = \lg 0,85\ 77\ 80\ 69 = \bar{1},933\ 37\ 63 \qquad \beta = 30^\circ\ 55'\ 54{,}1''$$

Los dos valores restantes de la ecuación cúbica, son imaginarios.

Del valor $\cos\beta = 0,85\ 77\ 80\ 69\ldots$ se deduce

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 30^\circ\ 55'\ 54{,}1'' = \sqrt{1-0,85\ 77\ 80\ 69^2} = 0.51\ 40\ 15\ 84$$

0,51 40 15 74 42

$$\operatorname{sen}\beta = 0.51\ 40\ 15\ 84. \qquad (4)$$

Comprobación numérica de la raíz real

Vamos a comprobar numéricamente si la raíz real obtenida para la ecuación (3), la verifica.

Dicha raíz es

$$x = \cos\beta = 0,85\ 77\ 80\ 69$$

0,85 77 80 74 99

siendo la ecuación:

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0$$

$$x^2 = 0{,}85\ 77\ 80\ 69^2 = \begin{array}{r} 0.\ 73\ 57\ 18\ 49\ 78\ 13\ 00\ 00 \\ 69\ 21\ 43\ 23\ 87\ 61 \\ \hline 0{,}\ 73\ 57\ 87\ 71\ 21\ 36\ 87\ 61 \\ \hline 0.\ 73\ 57\ 87\ 81\ 49 \end{array}$$

$$x^3 = 0{,}73\ 57\ 87\ 71 \times 0{,}85\ 77\ 80\ 69 = \begin{array}{r} 0{,}\ 63\ 10\ 85\ 11\ 88\ 67\ 00\ 00 \\ 59\ 37\ 07\ 10\ 31\ 99 \\ \hline 0{,}\ 63\ 11\ 44\ 48\ 95\ 77\ 31\ 99 \\ \hline 0{,}\ 63\ 11\ 44\ 62\ 36 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}x = 0{,}85\ 77\ 80\ 69 : 2 = \begin{array}{l} 0{,}\ 42\ 88\ 90\ 35 \\ 0{,}\ 42\ 88\ 90\ 37\ 50 \end{array}$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x = 0{,}63\ 11\ 44\ 49 - 0{,}42\ 88\ 90\ 35 = 0{,}20\ 22\ 54\ 14 \ldots \cong$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{16} = \begin{array}{l} 0{,}20\ 22\ 54\ 25 \ldots \\ 0{,}\ 20\ 22\ 54\ 24\ 36 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} x^3 \text{ ---} & 0{,}\ 63\ 11\ 44\ 62\ 36 \\ -\frac{1}{2}x \text{ ---} & -0{,}\ 42\ 88\ 90\ 37\ 50 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{16} \text{ ---} & -0{,}\ 20\ 22\ 54\ 24\ 86 \\ \hline \end{array}$$

con un error absoluto de $0{,}00\ 00\ 00\ 13$ (admisible) y cuyo resultado nos comprueba la exactitud hasta la cifra 10^{-7}. $(0{,}20\ 22\ 54\ 2)$

De acuerdo con el resultado obtenido en (4) y comprobado, de

$$\operatorname{sen} \beta = 0.\ 51\ 40\ 15\ 84$$

obtendremos finalmente:

$$\boxed{m} = \frac{l}{2 \operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{2 \times 0{,}51\ 40\ 15\ 84}\, l = \frac{1}{1{,}02\ 80\ 31\ 68}\, l = \boxed{0{,}97\ 27\ 32\ 67 \ldots l}$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (0{,}97\ 27\ 32\ 67\ldots\ \ell)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-(0{,}97\ 27\ 32\ 67\ldots)^2}}\ \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - 0{,}94\ 62\ 08\ 84\ 72\ 85\ 32\ 89}}\ \ell = \frac{1}{2\sqrt{0{,}05\ 37\ 91\ 15\ 27\ 14\ 67\ 11}}\ \ell =$$

$$= \frac{1}{2 \times 0{,}23\ 19\ 29\ 20}\ \ell = \frac{1}{0{,}46\ 38\ 58\ 40}\ \ell = \boxed{2{,}15\ 58\ 30\ 31\ldots\ \ell}$$

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{(2{,}15\ 58\ 30\ 31\ldots\ \ell)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{2{,}15\ 58\ 30\ 31^2 - 0{,}25} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4{,}64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0{,}25} \times \ell = \sqrt{4{,}39\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61} \times \ell =$$

$$= \boxed{2{,}09\ 70\ 46\ 57\ldots\ \ell}$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular regular de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \ell}$$

Radio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal regular, de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; \ell}$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31\ldots \ell)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - \frac{1}{3}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,31\ 42\ 70\ 99\ 21\ 81\ 36\ 28} \times \ell = \boxed{2,07\ 70\ 82\ 33\ldots\ \ell}$$

Radio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales regulares de lado "ℓ"

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II	Hoja nº 10

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_5} = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31\ldots l)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31\ldots)^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0,72\ 36\ 06\ 79\ 77\ 49\ 97\ 92} \times l$$

$$= \sqrt{3,92\ 39\ 97\ 52\ 77\ 64\ 71\ 69} \times l = \boxed{1,98\ 09\ 08\ 26\ldots\ l}$$

<u>Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33):

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2\ c_3}{\sqrt{4\ (d_3)^2 - l^2}} = \frac{2 \times 2,07\ 70\ 82\ 33\ldots l}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ l\right)^2 - l^2}} = \frac{4,15\ 41\ 64\ 66}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}} =$$

$$= 4,15\ 41\ 64\ 66 \times \sqrt{3} = 7,19\ 52\ 24\ 26\ldots$$

$$lg\ tg\ \alpha_3 = 0,857\ 04\ 44 \qquad \boxed{\alpha_3 = 82°\ 5'\ 15,6''}$$

---

		21 - 12 - 72

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II	Hoja nº 11

Angulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal regular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_5} = \frac{2\ c_5}{\sqrt{4\,(d_5)^2 - l^2}} = \frac{2 \times 1,98\ 09\ 08\ 26 \times l}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot l\right)^2 - l^2}} = \frac{3,96\ 18\ 16\ 52}{\sqrt{4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} - 1}} =$$

$$= \frac{3,96\ 18\ 16\ 52}{1,37\ 63\ 81\ 92} = 2,87\ 84\ 28\ 19 \ldots$$

$lg\ tg\ \alpha_5 = 0,45\,91\,554$ $\qquad \boxed{\alpha_5 = 70°\ 50'\ 31,8''}$

Angulo rectilíneo "φ_{3-3}" del diedro formado por dos caras triangulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{3-3}} = 2\,\alpha_3 = 2 \times (82°\ 5'\ 15,6'') = \boxed{164°\ 10'\ 31,2''}$$

Angulo rectilíneo "φ_{3-5}" del diedro formado por una cara triangular y una pentagonal

CE		21-12-72

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{3-5}} = \alpha_3 + \alpha_5 = 82^\circ\ 5'\ 15{,}6'' + 70^\circ\ 50'\ 31{,}8'' =$$

$$= \boxed{152^\circ\ 55'\ 47{,}4''}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de 80 caras triangulares y 12 pentagonales, regulares y de lado "ℓ"; la superficie total será:

$$\boxed{S} = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ell^2 = \left[20\sqrt{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right]\times \ell^2 =$$

$$= \left[34{,}64\ 10\ 16\ 2 + 20{,}64\ 57\ 28\ 8\right]\times \ell^2 = \boxed{55{,}28\ 67\ 45\ 0\ldots\ \ell^2}$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 80 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 12 pirámides de base pentagonal regular y altura "c_5"; su valor será:

$$\boxed{V} = \left[80 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ell^2 \times \frac{c_5}{3}\right] =$$

$$= \left[34{,}64\ 10\ 16\ 2 \times \frac{2{,}07\ 70\ 82\ 3}{3} + 20{,}64\ 57\ 28\ 8 \times \frac{1{,}98\ 09\ 08\ 3}{3}\right]\times \ell^3 =$$

$$= \left[23,98\,40\,80\,5 + 13,63\,24\,31\,8 \right] \times \ell^3 = \boxed{37,61\,65\,12\,3\ldots \times \ell^3}$$

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\dfrac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}}$	$2,15\,58\,30\ldots\ \ell$
b	$\sqrt{a^2 - \dfrac{\ell^2}{4}}$	$2,09\,70\,47\ldots\ \ell$
c_3	$\sqrt{a^2 - (d_3)^2}$	$2,07\,70\,82\ldots\ \ell$
c_5	$\sqrt{a^2 - (d_5)^2}$	$1,98\,09\,08\ldots\ \ell$
d_3	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0,57\,73\,50\ldots\ \ell$
d_5	$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0,85\,06\,51\ldots\ \ell$
m	$\dfrac{1}{2\ \mathrm{sen}\,\beta}\ \ell$	$0,92\,27\,33\ldots\ \ell$
α_3	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = \dfrac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_3 = 7,19\,52\,24\ldots$ $\alpha_3 = 82^\circ\ 5'\ 15,6''$
α_5	$\mathrm{tg}\ \alpha_5 = \dfrac{2c_3}{\sqrt{4(d_5)^2 - \ell^2}}$	$\mathrm{tg}\ \alpha_5 = 2,87\,84\,28\ldots$ $\alpha_5 = 70^\circ\ 50'\ 31,8''$
$\varphi_{3\text{-}3}$	$\alpha_3 + \alpha_3$	$\varphi_{3\text{-}3} = 164^\circ\ 10'\ 31,2''$
$\varphi_{3\text{-}5}$	$\alpha_3 + \alpha_5$	$\varphi_{3\text{-}5} = 152^\circ\ 55'\ 47,4''$
S	$\left[20\sqrt{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right] \times \ell^2$	$55,28\,67\,45\ldots\ \ell^2$
V	$\left[20\sqrt{3} \times \dfrac{c_3}{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \dfrac{c_5}{3}\right] \times \ell^2$	$37,61\,65\,12\ldots\ \ell^3$
β	$\cos\beta = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\dfrac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} + \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{32} - \sqrt{\dfrac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}}$	$\cos\beta = 0,85\,77\,80\,69\ldots$ $\beta = 30^\circ\ 55'\ 54,1''$
	$\mathrm{sen}\ \beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$	$\mathrm{sen}\ \beta = 0,51\,40\,15\,84\ldots$

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder a la representación gráfica del Arquimediano II, de lado dado, en la lámina nº 341

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo estudiaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{II}" del arquimediano, de 25,5 mm (25,51 22 16)

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

$l_{II} = \quad = 25,5$ mm

$a = 2,15\,58\,30 \times 25,5 = 55,0$ mm

$b = 2,09\,70\,47 \times 25,5 = 53,5$ mm

$c_3 = 2,07\,70\,82 \times 25,5 = 53,0$ mm

$c_5 = 1,98\,09\,08 \times 25,5 = 50,5$ mm

$d_3 = 0,57\,53\,50 \times 25,5 = 14,7$ mm

$d_5 = 0,85\,06\,51 \times 25,5 = 21,7$ mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lam. 34) es el siguiente:

1º Situar el centro 0, de coordenadas 72, 72, 85 mm

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio $a = 55$ mm.

3º Representar en I, II y III la cara pentagonal

[illegible]

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II	Hoja nº 15

1-2-3-4-5, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y un lado (1-5) perpendicular a I. (utilícese la cota "c_5" en I y III).

4º Obtener en I, II y III las proyecciones del vértice 6 de la cara contigua triangular de arista 1-5 hasta colocar el vértice 6 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en 1_I, con radio igual a la altura de la cara 1-5-6 y se trazará un arco que corte en 6_I a la esfera circunscrita

5º Determinar las proyecciones en II y III de dicho vértice 6, y seguidamente en I, II y III de los vértices 7 al 10 (los vértices 6 al 10 son los de un pentágono regular de plano paralelo al II).

6º Determinar en I la posición del vértice 14 (la arista 3-14 es paralela a I) sobre la esfera circunscrita, lo que nos permite obtener en II y III las proyecciones de dicho vértice. Los vértices 11, 12, 13 y 15 se pueden obtener seguidamente en sus tres proyecciones, puesto que el pentágono que se obtiene al unir los 11 al 15 es regular y su plano paralelo a II.

7º Para la obtención gráfica de las proyecciones de los vértices 16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30, que nos faltan para conseguir la representación de la mitad superior de este poliedro, tendríamos que efectuar el giro de las caras contiguas alrededor de aristas ya determinadas. Estos giros presentan cierta dificultad al ser todas las aristas

F.C.		20 - 1 - 73

del contorno poligonal ya obtenido (ver 6-12-7-13-8-14-9-15-10-11-6 en planos I y II) oblicuas a I y II, lo cual nos obliga a cambios de plano para conseguir la perpendicular, de la arista tomada como eje de giro, a uno de los planos de proyección. Se simplifica este proceso si previamente conocemos las distancias de dichos puntos al plano paralelo a II que pasa por 0. Dichas distancias pueden obtenerse analíticamente, teniendo en cuenta que los vértices 16 al 20 son a su vez vértices de un pentágono regular cuyo plano es paralelo a II. Lo mismo ocurre con los 21 al 25 y los 26 al 30.

En el cálculo analítico que efectuaremos a continuación obtendremos las siguientes magnitudes. (distancias de vértices al plano paralelo a II que pasa por el centro 0 del poliedro):

7.1 Distancia de los vértices 1 al 5 (radio "a_S" de la esfera inscrita a una cara pentagonal).

7.2 Distancia de los vértices 6 al 10 $\left(g_1 - \frac{f_1}{2}\right)$

7.3 Distancia de los vértices 11 al 15 $\left(g_2 - \frac{f_2}{2}\right)$

7.4 Distancia de los vértices 16 al 20 $\left(g_3 - \frac{f_3}{2}\right)$

7.5 Distancia de los vértices 21 al 25 $\left(g_5 - \frac{f_5}{2}\right)$

7.6 Distancia de los vértices 26 al 30 $\left(g_6 - \frac{f_6}{2}\right)$.

El conocimiento previo de las cotas anteriores, nos facilita el trazado gráfico para la obtención sucesiva de las proyecciones de los grupos de vértices 16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30.

En efecto, si queremos p. e. determinar las proyecciones del vértice 18, perteneciente a la cara triangular 8 - 12 - 7, cuyos otros dos vértices 12 y 7 han sido ya obtenidos en el dibujo, tendremos que hacer girar dicha cara alrededor de la arista 12-7 hasta que el punto 18 esté sobre el plano del pentágono de vértices 16 al 20, el cual podemos situar, previamente por la cota analítica

$$"g_3 - \frac{f_3}{2}"$$

ya calculada.

Esta operación se efectúa fácilmente por giro sucesivo de la arista conocida del poliedro sobre dos ejes perpendiculares a II, que pasen por 12 y 7 respectivamente, que nos permite obtener, primero en II y seguidamente en I las respectivas proyecciones del mencionado vértice 18.

Obtenida éstas se pueden determinar las proyecciones de los vértices restantes del grupo 16 al 20 que forman un pentágono regular y cuyo centro en II coincide con la proyección también en II del centro del arquimediano.

Este mismo proceso se seguirá en la determinación de las proyecciones de los vértices del grupo 21

al 25 auxiliándose de la distancia analítica "$g_4 - \frac{f_4}{2}$" y finalmente para los vértices del grupo 26 al 30, mediante la cota "$g_5 - \frac{f_5}{2}$".

Con los pasos anteriores, hemos obtenido, en I y II, las proyecciones de la mitad de los vértices (1 al 30) del arquimediano pedido, correspondientes a su parte superior: La obtención de estas proyecciones sobre III, es inmediata, y se deduce de las de los planos I y II.

Para completar la representación del poliedro en su otra mitad, tendremos en cuenta las siguientes propiedades del arquimediano, que nos servirán para su rápido trazado.

7.7 "Las proyecciones en II, de los vértices 31 al 60, "son simétricas de las de los vértices 1 al 30 "(ya obtenidas) con respecto a un eje que pasa por la proyección O_{II} del centro, y que forma con el eje "$6_{II} - O_{II}$" un ángulo ε "de "

7.8 " Las proyecciones en I, de los vértices 31 al 60 " están situadas en planos paralelos a II y a distancias iguales y simétricas (ya obtenidas) del " también paralelo a II que pasa por la proyección O_I del centro.

8º Numerar los vértices.

-Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analiticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado. (ver figura de la lámina).

Altura "n" de una cara triangular

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0,86\,60\,25\,4\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será $n = 0,86\,60\,25\,4 \times 25,5 = 22,1$ mm

---

Distancia "g_1" de los vértices 6 al 10 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los 51 al 55 a la cara pentagonal 56 al 60.

Se obtiene proyectando la altura "n" sobre el plano III; el ángulo de proyección es de

$$\varphi_{3-5} - 90° = 152°\ 55'\ 47,4'' - 90° = 62°\ 55'\ 47,4''$$

$$\boxed{g_1} = n \times \cos 62°\ 55'\ 47,4'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 62°\ 55'\ 47,4'' \times l =$$

$$= \boxed{0,39\,41\,12\,00\ldots \times l}\ .$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\frac{1}{2}$ lg 3 = $\frac{1}{2}$ × 0, 477 12 13 ———— = 0, 238 56 07
+ lg. cos 62° 55′ 47,4″ = ———— = $\bar{1}$, 652 08 90

$\bar{1}$, 896 64 97

− lg. 2 = = 0. 301 03 00

$\boxed{\text{lg. } 0{,}39\ 41\ 12\ 00\ldots}$ = $\bar{1}$, 595 61 97

Para el caso del dibujo, será: g_1 = 0, 39 41 12 00... × 25,5 = 10,0 mm

---

Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 6 al 10 y 51 al 55 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_5" y "g_1", ya calculadas.

$$\boxed{f_1} = 2\,(c_5 - g_1) = 2 \times (1{,}98\ 09\ 08\ 26 - 0{,}39\ 41\ 12\ 00) \times l =$$

$$= \boxed{3{,}17\ 35\ 92\ 52\ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: f_1 = 3, 17 35 93 × 25,5 = 80,9 mm

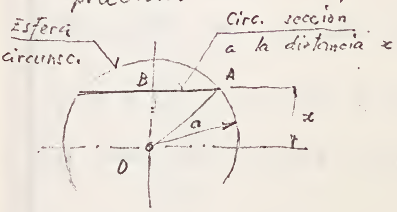
---

Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 6 al 10 y 51 al 55.* (véase nota a la vuelta)

Está representado en su verdadera magnitud, en el plano II, por el segmento 6-0, suma del 6-B y del B-0.

* NOTA

Este radio puede obtenerse directamente, en función de la distancia a que se encuentra el plano de la cara, del centro del poliedro (supuesta conocida), ya que en este caso dicho radio es el mismo que el de la circunferencia que se obtendría al seccionar la esfera circunscrita por el plano de la cara, puesto que los vértices 6 al 10 y 51 al 55 pertenecen a la esfera circunscrita del poliedro.



$$AB = r_1 = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

a = radio de la esfera circunscrita al arquimediano.

En el caso particular que nos ocupa será, haciendo

$a = 2,15\ 58\ 30\ 31 \ldots \ell$ y $x = \frac{l_1}{2} = \frac{3,17\ 35\ 92\ 52}{2}\ell$

$= 1,58\ 67\ 96\ 26$

$$r_1 = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31)^2 - (1,58\ 67\ 96\ 26)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 2,51\ 79\ 22\ 37\ 07\ 49\ 88\ 76} \times \ell =$$

$$= \sqrt{2,12\ 96\ 81\ 95\ 47\ 64\ 70\ 85} = 1,45\ 93\ 43\ 1 \ldots \ell$$

(Valor coincidente con el calculado anteriormente.

$6 - B = n \times \text{sen } 62° \, 55' \, 47{,}4''$ (ver cálculo de g_1)

$B - O = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} \, l$ (radio de la circunferencia inscrita al pentágono regular de una cara, de lado "l")

$\boxed{r_1} = n \times \text{sen } 62° \, 55' \, 47{,}4'' + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \, l = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{sen } 62° \, 55' \, 47{,}4'' + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \right) l =$

$= \boxed{1{,}45\ 93\ 43\ 1 \ldots \, l}$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\frac{1}{2} \lg 3 = \frac{1}{2} \times 0{,}477\ 12\ 13$ ——— $= 0{,}238\ 56\ 07$

$+ \lg \text{sen } 62° \, 55' \, 47{,}4''$ ——— $= \bar{1}{,}949\ 60\ 94$

$0{,}188\ 17\ 01$

$- \lg 2$ ——— $= - 0{,}301\ 03\ 00$

$\lg \boxed{0{,}77\ 11\ 52\ 14} = \bar{1}{,}887\ 14\ 01$

$n \times \text{sen } 62° \, 55' \, 47{,}4'' = 0{,}77\ 11\ 52\ 14$

$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}$ ——— $= 0{,}68\ 81\ 91{,}0$

$\boxed{r_1 = 1{,}45\ 93\ 43\ 1 \ldots \, l}$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1{,}45\ 93\ 43\ 1 \times 25{,}5 = 37{,}2$ mm.

<u>Distancia "g_2" de los vértices 11 al 15 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los 46 al 50 a la cara pentagonal 56 al 60.</u>

Se obtiene proyectando la arista 3 - 14, sobre plano III, ya que dicha arista es paralela al I.

El ángulo ε de proyección se determina de la siguiente manera.

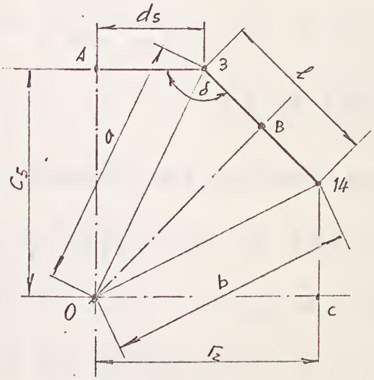


Figura 1

Consideremos (fig. 1) la sección del poliedro por el plano diametral que pasa por la arista 3 - 14 y el centro O del mismo. Dicho plano pasará a su vez por el centro A de la cara pentagonal 1 al 5. Unamos A, 3, B (punto medio de 3 - 14) y 14, con el centro O. El ángulo δ es el formado por la arista 3 - 14 con el plano de la cara pentagonal 1 al 5.

De la figura se deduce que

$$\cos\left(\widehat{A-3-0}\right) = \frac{d_5}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l}{\frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}}} = \frac{0{,}85\ 06\ 50\ 8}{2{,}15\ 58\ 30\ 3} = 0{,}39\ 45\ 81\ 5\ldots$$

$$\boxed{\sphericalangle\ A-3-0 = 66°\ 45'\ 36{,}4''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg 0{,}39\ 45\ 81\ 5 = \bar{1}{,}596\ 13\ 67 = \lg \cos\left(\widehat{A-3-0}\right)$$

$$\sphericalangle\ \widehat{A-3-0} = 66°\ 45'\ 36{,}4''$$

y por otra parte

$$\cos(0-3-B) = \frac{l:2}{a} = \frac{l}{2a} = \frac{l}{2 \times \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}}} = \frac{1}{2 \times 2{,}15583 03} =$$

$$= \frac{1}{4{,}31166 06} = 0{,}23192920$$

$$\boxed{\measuredangle(0-3-B) = 76^\circ\ 35'\ 21{,}6''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg \cos(0-3-B) = \lg 0{,}23192920 = \bar{1}{,}3653554$$

$$\measuredangle(0-3-B) = 76^\circ\ 35'\ 21{,}6''$$

y por consiguiente

$$\boxed{\delta} = 66^\circ\ 45'\ 36{,}4'' + 76^\circ\ 35'\ 21{,}6'' = \boxed{143^\circ\ 20^\circ\ 58''}$$

Si proyectamos la arista 3-14 sobre el plano $\underline{III}$, el ángulo ε de proyección será:

$$\varepsilon = 143^\circ\ 20'\ 58'' - 90^\circ = 53^\circ\ 20'\ 58''$$

por lo que finalmente tendremos:

$$\boxed{g_2} = l \cos 53^\circ\ 20'\ 58'' = \boxed{0{,}59693301 \ldots\ l}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\lg \cos 53^\circ\ 20'\ 58'' = \bar{1}{,}7759256$$

$$\text{Antilg } \bar{1}{,}7759256 = \boxed{0{,}59693301 \ldots}$$

—

Para el caso particular del dibujo, será:

$$g_2 = 0,59\ 69\ 33\ 01 \times 25,5 = 15,2 \text{ mm.}$$

<u>Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 11 al 15 y 46 al 50 respectivamente.</u>

Se obtienen por diferencias de alturas "c_5" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\,(c_5 - g_2) = 2 \times (1,98\ 09\ 08\ 26 - 0,59\ 69\ 33\ 01)\ \ell =$$

$$= \boxed{2,76\ 79\ 50\ 50 \ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $f_2 = 2,76\ 79\ 50\ 50 \times 25,5 = 70,6$ mm.

<u>Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 11 al 15 y 46 al 50</u>* (ver nota al reverso de la pág. 20)

$$\boxed{r_2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31)^2 - \left(\tfrac{1}{2} \times 2,76\ 79\ 50\ 50\right)^2} \times \ell$$

$$= \sqrt{(2,15\ 58\ 30\ 31)^2 - (1,38\ 39\ 75\ 25)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 1,91\ 53\ 87\ 49\ 26\ 12\ 56\ 26} \times \ell$$

$$= \sqrt{2,73\ 22\ 16\ 83\ 29\ 02\ 13\ 36} \cdot \ell = \boxed{1,65\ 29\ 41\ 87 \ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo será: $r_2 = 1,65\,29\,41\,87 \times 25,5 = 42,1$ mm.

Puede comprobarse el valor "r_2" de este radio, proyectando el contorno A - 3 - 14 (fig. 1) sobre el eje OC.

Su valor se obtendrá: $\boxed{r_2} = d_5 + l\,(\text{sen}\ \delta - 90^\circ) =$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l + \text{sen}\ (143^\circ\ 20'\ 58'' - 90^\circ)\ l = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \text{sen}\ 53^\circ\ 20'\ 58''\right] \cdot l$$

$$= (0,85\,06\,50\,8 + 0,80\,22\,91\,1)\ l = \boxed{1,65\,29\,41\,9\ldots\ l}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$\lg$ sen $53^\circ\ 20'\ 58'' = \bar{1},90\,43\,32\,0$

Antilog $\bar{1},90\,43\,32\,0 = 0,80\,22\,91\,1\ldots$

valor coincidente con el obtenido anteriormente.

<u>Distancia "g_3" de los vértices 16 al 20 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 41 al 45 a la cara pentagonal 56 al 60.</u>

El cálculo de la situación de los grupos de vértices 16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30, así como la de los grupos equidistantes del plano diametral, 31 al 35, 36 al 40 y 41 al 45. (cotas g_3, g_4, g_5 y f_3, f_4, f_5), se basa en

la siguiente propiedad geométrica de este arquimediano, que enunciamos a continuación:

"El sólido que se obtiene al prolongar el plano de
"una cara pentagonal, hasta su intersección con
"las cinco caras también pentagonales que la rodean,
"es un dodecaedro regular", siendo el centro de las
"caras pentagonales del arquimediano, coincidente con el de las
"del dodecaedro.

De aquí se deduce que el radio c_{12} de la esfera inscrita al dodecaedro. es coincidente con el radio $c_{5\,II}$ de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano II. Así pues podemos obtener las dimensiones del dodecaedro (ver lám. 4) en función del lado "l" del arquimediano, puesto que siendo $c_{12} = c_{5\,II}$ se verificará que (ver fórm. 32. lám. 4):

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\; l_{12} = 1{,}98\,09\,08\,26\ldots\, l \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{l_{12}} = \frac{1{,}98\,09\,08\,26}{\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}}\, l = \frac{1{,}98\,09\,08\,26}{1{,}11\,35\,16\,4}\, l = \boxed{1{,}77\,89\,75\,3\ldots\, l}$$

Para el caso del dibujo será: $l_{12} = 1{,}77\,89\,75\,3 \times 25{,}5 = 45{,}4$ mm.

Conocido el lado del dodecaedro, el del arquimediano, y el diedro de las caras del primero (ver fórm. 34, lám. 4), podemos determinar la posición del pentá-

gono del arquimediano en relación con el de la cara del dodecaedro de centro coincidente, por proyección de las alturas "g_1" y "g_2" ya determinadas.

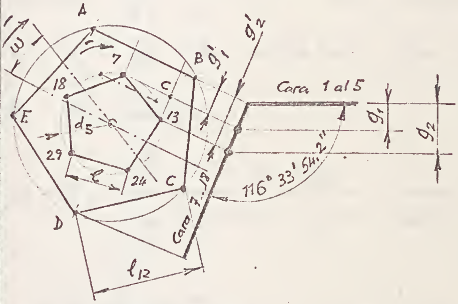


Figura 2

En la figura 2, hemos representado, a la derecha, el diedro que forman dos caras del dodecaedro, siendo el plano de la superior coincidente con el de la cara 1 al 5 del arquimediano; la figura de la izquierda es el abatimiento, sobre el plano del dibujo, de la cara oblicua, contigua a la anterior, que contiene, girada, una cara pentagonal del arquimediano dado, siendo esta última una cualquiera de las cinco que rodean a la de vértices 1 al 5.

Sea A-B-C-D-E el pentágono del dodecaedro, y 7-13-24-29-18 el pentágono del arquimediano contenido en el anterior. El ángulo de giro "ω" que habría que aplicar para pasar de una posición de lados paralelos en los dos pentágonos, a la posición real, se deduce del triángulo rectángulo 7-C-13 en el que

$$\measuredangle\ \widehat{C-7-13} = \omega$$

Su hipotenusa 7-13 es igual a "ℓ", y su cateto

C-13, es

$$C - 13 = g'_2 - g'_1$$

siendo "g'_1" y "g'_2" las proyecciones respectivas de "g_1" y "g_2" de las alturas ya calculadas. Por consiguiente, tendremos

$$g'_2 - g'_1 = \frac{g_2 - g_1}{\cos(116^\circ\ 33'\ 54{,}2'' - 90^\circ)} = \frac{0{,}59\ 69\ 33\ 01 - 0{,}39\ 41\ 12\ 00}{\cos(26^\circ\ 33'\ 54{,}2'')} \times l$$

$$= \frac{0{,}20\ 28\ 21\ 01}{0{,}89\ 44\ 27\ 14} \times l = 0{,}22\ 67\ 60\ 80 \ldots l \qquad \left\{ \begin{array}{l} g'_2 = 0{,}66\ 73\ 91\ 4 \\ g'_1 = 0{,}44\ 06\ 30\ 6 \end{array} \right\}$$

y finalmente

$$\operatorname{sen} w = \operatorname{sen}(\widehat{C - 7 - 13}) = \frac{C-13}{7-13} = \frac{g'_2 - g'_1}{l} = 0{,}22\ 67\ 60\ 80 \ldots$$

$$\boxed{w = 13^\circ\ 6'\ 23{,}2''}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\left. \begin{array}{l} \lg. \cos(26^\circ\ 33'\ 54{,}2'') = \bar{1}{,}95\ 15\ 45\ 0 \\ \text{Antilog } \bar{1}{,}95\ 15\ 45\ 0 = 0{,}89\ 44\ 27\ 14 \end{array} \right\}$$

$$\lg \operatorname{sen} w = \lg 0{,}22\ 67\ 60\ 80 = \bar{1}{,}355\ 56\ 79$$

$$\boxed{w = 13^\circ\ 6'\ 23{,}2''}$$ ✓

—

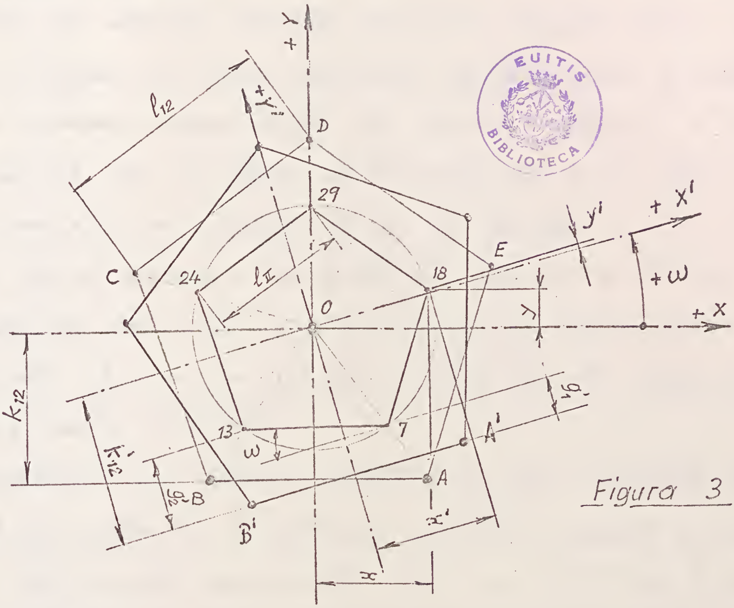


Figura 3

El proceso a seguir para determinar las restantes magnitudes analíticas "g_3", "g_4" y "g_5", requiere obtener previamente las proyecciones de las mismas "g'_3", "g'_4" y "g'_5" sobre la cara del dodecaedro que contiene la pentagonal del Arquimediano II y ambas de centro "0" común. Los lados de ambos pentágonos regulares forman entre sí el ángulo constante "ω" ya determinado, por lo cual podemos considerar que, suponiendo previamente el pentágono interior colocado con sus lados paralelos al exterior, llegaríamos a la posición final del primero mediante el giro del mismo alrededor del centro común 0, de un ángulo de amplitud "ω" (también se llega al mismo resultado suponiendo fijo el polígono interior y

girando el exterior alrededor de O, el ángulo "ω").

En la figura 3 hemos planteado gráficamente el problema a resolver, conservando la misma notación de vértices que la de la figura 2. (el conjunto de la figura 3 esta invertido con respecto al de la fig. 2).

Sea (fig. 3) A-B-C-D-E el pentágono regular de la cara del dodecaedro de lado "l_{12}"; 7-13-24-29-18 el del arquimediano dado de lado "l_{II}", en su posición inicial con sus lados paralelos y centro O común.

Consideremos un sistema cartesiano de eje X paralelo al lado B-A, y centro O. El problema analítico consiste en encontrar las nuevas coordenadas "x'" e "y'" de los vértices 7, 13, 24, 29, 18 en función de las primitivas "x" e "y", cuando los ejes, juntamente con el pentágono exterior A-B-C-D-E, giran alrededor del origen O, el ángulo "ω."

Las fórmulas de transformación son: *

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega \\ y' &= -x \operatorname{sen} \omega + y \cos \omega \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

de las cuales solo necesitamos aplicar la segunda:- Conociendo "y'", se puede calcular "g'", por

$$g' = k'_{12} + y' \qquad (2)$$

---

* Véase "Tratado de Matemáticas" por R. Doerfling; Editorial Gustavo Gili, S. A.; Barcelona 1945.- Pág. 195, párrafo 3.

Comencemos por calcular $k_{12} = k'_{12}$ (ver fig. 3). Es la apotema de la cara pentagonal de lado "ℓ_{12}"; su valor será pues (ver lám. 4, fórm. 39)

$$\boxed{k_{12}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell_{12} = 0.68\,81\,91\,0\ldots\,\ell_{12} = 0.68\,81\,91\,0\ldots \times 1.77\,89\,75\,3\ldots \times \ell =$$

$$= \boxed{1.22\,42\,74\,8\ldots\,\ell}$$ ✓

Continuemos calculando las coordenadas "x" e "y" de los vértices del pentágono interior de lado "ℓ"

7 $\begin{cases} x_7 = +\frac{1}{2}\,\ell = \text{———} = +0.50\,00\,00\,0\ldots\,\ell \\ y_7 = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell = \text{———} = -0.68\,81\,91\,0\ldots\,\ell \end{cases}$

13 $\begin{cases} x_{13} = -\frac{1}{2}\,\ell = \text{———} = -0.50\,00\,00\,0\ldots\,\ell \\ y_{13} = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell = \text{———} = -0.68\,81\,91\,0\ldots\,\ell \end{cases}$

18 $\begin{cases} x_{18} = +\ell \operatorname{sen} 54^\circ = \text{———} = +0.80\,90\,16\,9\ldots\,\ell \\ y_{18} = +d_\ell - \ell\cos 54^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell - \cos 54^\circ\,\ell \text{ — } = +0.26\,28\,65\,5\ldots\,\ell \end{cases}$

24 $\begin{cases} x_{24} = -\ell \operatorname{sen} 54^\circ = \text{———} = -0.80\,90\,16\,9\ldots\,\ell \\ y_{24} = y_{18} = \text{———} = +0.26\,28\,65\,5\ldots\,\ell \end{cases}$

29 $\begin{cases} x_{29} = \pm 0 = \text{———} = \pm 0 \\ y_{29} = +d_\ell = +\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell = \quad = +0.85\,06\,50\,8\ldots\,\ell \end{cases}$

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II	Hoja nº 32

En los cálculos anteriores intervienen los valores:

a) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = 0,68\ 81\ 91\ 0...$

b) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0,85\ 06\ 50\ 8..$

c) $\cos 54°$; $\lg \cos 54° = \bar{1},76\ 92\ 18\ 7$ $\cos 54° = 0,58\ 77\ 85\ 3...$

d) $\text{sen } 54°$; $\lg \text{sen } 54° = \bar{1},90\ 79\ 57\ 6$ $\text{sen } 54° = 0,80\ 90\ 16\ 9...$

Para aplicar las fórmulas 1) y 2) tabulamos los cálculos respectivos a continuación:

TABLA I

Vértice	x	y	$-x$ sen w = $= -0,22\ 67\ 60\ 8\ x$
7	+ 0.50 00 00 0.. l	− 0,68 81 91 0... l	− 0,11 33 80 4... l
13	− 0.50 00 00 0.. l	− 0,68 81 91 0... l	+ 0,11 33 80 4... l
24	− 0,80 90 16 9... l	+ 0,26 28 65 5... l	+ 0,18 34 53 3... l
29	± 0	+ 0,85 06 50 8... l	± 0,00 00 00 0... l
18	+ 0,80 90 16 9.. l	+ 0,26 28 65 5... l	− 0,18 34 53 3... l

Vértice	$+y \cos w =$ $= 0.97\ 39\ 50\ 2\ y'$	$y' = -x$ sen w + $+ y \cos w$	$g' = k_n' + y' =$ $= 1.22\ 42\ 74\ 8..l + y'$
7	− 0,67 02 63 8... l	− 0,78 36 44 2... l'	+ 0,44 06 30 6... l
13	− 0,67 02 63 8... l	− 0,55 68 83 4... l	+ 0,66 73 91 4 ... l
24	+ 0,25 60 17 9... l	+ 0,43 94 71 2 ... l	+ 1,66 37 46 0 ... l
29	+ 0,82 84 91 5.. l	+ 0,82 84 91 5 ... l	+ 2,05 37 66 3 ... l
18	+ 0,25 60 17 9... l	+ 0,07 25 64 6 ... l	+ 1,29 68 39 4 ... l

CE		28 - 1 - 73

Como puede observarse, los valores de "g'_1" y "g'_2" obtenidos en la tabla, correspondientes a los vértices 7 y 13, después del giro w, son coincidentes, como debe suceder, con los iniciales que sirvieron de base para la determinación del ángulo de giro; esto nos sirve de comprobación del cálculo realizado.

Como resultado del cálculo anterior, se han obtenido las distancias "g'_1" a "g'_5" de los vértices de una cara pentagonal del arquimediano al lado del dodecaedro regular de caras coincidentes con las anteriores (de igual esfera circunscrita), distancias medidas sobre dicha cara. Sus valores son los siguientes:

$$g'_1 = 0,44\ 06\ 30\ 6\ldots\ l \qquad (\text{vértice } 7)$$
$$g'_2 = 0,66\ 37\ 46\ 0\ldots\ l \qquad (\text{"} \ 13)$$
$$g'_3 = 1,29\ 68\ 39\ 4\ldots\ l \qquad (\text{"} \ 18)$$
$$g'_4 = 1,66\ 37\ 46\ 0\ldots\ l \qquad (\text{"} \ 24)$$
$$g'_5 = 2,05\ 27\ 66\ 3\ldots\ l \qquad (\text{"} \ 29)$$

Sólo nos resta proyectar estas distancias sobre el plano III. El ángulo de proyección será (ver fig. 2)

$$116°\ 33'\ 54,2'' - 90° = 26°\ 33'\ 54,2''$$

en el que

$$\cos 26°\ 33'\ 54,2'' = 0,89\ 44\ 27\ 14\ldots$$

de donde se obtiene

$g_1 = 0{,}44\ 06\ 30\ 6\ldots \times 0{,}89\ 44\ 27\ 14\ldots\ \ell = 0{,}39\ 41\ 12\ 0\ldots\ \ell$

$g_2 = 0{,}66\ 73\ 91\ 4 \times \quad " \quad \ldots \ell = 0{,}59\ 69\ 33\ 0\ldots\ \ell$

$g_3 = 1{,}29\ 68\ 39\ 4\ldots \times \quad " \quad \ldots \ell = 1{,}15\ 99\ 28\ 4\ldots\ \ell$

$g_4 = 1{,}66\ 37\ 46\ 0\ldots \times \quad " \quad \ldots \ell = 1{,}48\ 80\ 99\ 6\ldots\ \ell$

$g_5 = 2{,}05\ 27\ 66\ 3\ldots \times \quad " \quad \ldots \ell = 1{,}83\ 60\ 49\ 9\ldots\ \ell$

$$\boxed{g_3 = 1{,}15\ 99\ 28\ 4\ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo será: $g_3 = 1{,}15\ 99\ 28\ 4 \times 25{,}5 = 29{,}6$ mm

---

Distancia "f_3" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 16 al 20 y 41 al 45 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_5" y "g_3", ya calculadas.

$$\boxed{f_3} = 2\,(c_5 - g_3) = 2 \times (1{,}98\ 07\ 08\ 3 - 1{,}15\ 99\ 28\ 4)\,\ell = \boxed{1{,}64\ 19\ 59\ 8\ldots\ \ell}$$

Para el caso del dibujo será: $f_3 = 1{,}64\ 19\ 59\ 8\ldots \times 25{,}5 = 41{,}9$ mm

---

Radio "r_3" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 16 al 20 y 41 al 45 respectivamente

(ver nota al reverso de la pág. 20)

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{(2{,}15\ 58\ 30\ 31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 1{,}64\ 19\ 59\ 80\right)^2} \times \ell =$$

UNE A4 210 X 297

$$= \sqrt{(2.15\ 58\ 30\ 31)^2 - (0.82\ 09\ 79\ 90)^2} \cdot l =$$

$$= \sqrt{4.64\ 76\ 04\ 32\ 55\ 14\ 69\ 61 - 0.67\ 40\ 07\ 99\ 62\ 04\ 01} \times l =$$

$$= \sqrt{3.97\ 35\ 96\ 32\ 93\ 10\ 68\ 61} \times l = \boxed{1.99\ 33\ 88\ 2 \ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo será: $r_3 = 1{,}99\ 33\ 88\ 2 \ldots \times 25.5 = 50{,}8$ mm

---

Distancia "g_4" de los vértices 21 al 25 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 36 al 40 a la cara pentagonal 56 al 60. (ver final cálculo "g_3")

$$\boxed{g_4 = 1.48\ 80\ 99\ 6 \ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $g_4 = 1{,}48\ 80\ 99\ 6 \ldots \times 25{,}5 = 37{,}9$ mm

---

Distancia "f_4" entre los planos paralelos a II que contienen los vértices 21 al 25 y 36 al 40, respectivamente.

Se obtiene por diferencias de alturas "c_5" y "g_4", ya calculadas.

$$\boxed{f_4} = 2\,(c_5 - g_4) = 2 \times (1.98\ 09\ 08\ 3 - 1.48\ 80\ 99\ 6)\,l = \boxed{0.98\ 56\ 17\ 4 \ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $f_4 = 0.98\ 56\ 17\ 4 \ldots \times 25{,}5 = 25{,}1$ mm

---

Radio "r_4" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 21 al 25 y 36 al 40 respectivamente.

(ver nota al reverso de la página 20)

$$\boxed{r_4} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_4}{2}\right)^2} = \sqrt{(2,15\,58\,30\,31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 0,98\,56\,17\,40\right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{(2,15\,58\,30\,31)^2 - (0,49\,28\,08\,70)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,64\,76\,04\,32\,55\,14\,69\,61 - 0,24\,28\,60\,41\,47\,95\,69\,00} \times \ell =$$

$$= \sqrt{4,40\,47\,43\,91\,07\,19\,00\,61} \times \ell = \boxed{2,09\,87\,48\,2\ldots\,\ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_4 = 2,09\,87\,48\,2\ldots \times 25,5 = 53,5$ mm

---

Distancia "g_5" de los vértices 26 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 31 al 35 a la cara pentagonal 56 al 60. (ver final cálculo "g_3")

$$\boxed{g_5 = 1,83\,60\,49\,9\ldots\,\ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $g_5 = 1,83\,60\,49\,9\ldots \times 25,5 = 46,8$ mm

---

Distancia "f_5" entre los dos planos paralelos a II que contienen los vértices 26 al 30 y 31 al 35, respectivamente.

Se obtiene por diferencia de alturas "c_5" y "g_5", ya calculadas.

$$\boxed{f_5} = 2\,(c_5 - g_5) = 2 \times (1.98\,09\,08\,3 - 1,83\,60\,49\,9) = \boxed{0.28\,97\,16\,8 \ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $f_5 = 0.28\,97\,16\,8\ldots \times 25{,}5 = 7{,}4$ mm

---

Radio "r_5" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 26 al 30 y 31 al 35 respectivamente.

(ver nota al reverso de la pág. 20)

$$\boxed{r_5} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_5}{2}\right)^2} = \sqrt{(2.\,15\,58\,30\,31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 0.28\,97\,16\,80\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{(2.\,15\,58\,30\,31)^2 - (0.\,14\,48\,58\,40)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{4.\,64\,76\,04\,32\,55\,14\,69\,61 - 0.\,02\,09\,83\,95\,60\,50\,56\,00} \times l =$$

$$= \sqrt{4.\,62\,66\,20\,36\,94\,64\,13\,61} \times l = \boxed{2,\,15\,09\,58\,0 \ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $r_5 = 2.\,15\,09\,58\,0\ldots \times 25{,}5 = 54.9$ mm

---

Angulo "ε" que forma el eje de simetría "h", en la proyección II, con el eje paralelo a X.

Refiriéndonos a la proyección II (lám. 34), el triángu-

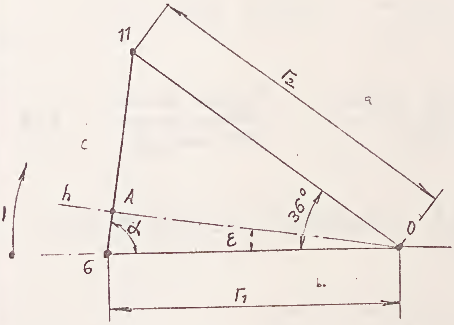


Figura 4

11-0-6 (fig. 4), tiene los valores ya calculados $6\text{-}0 = r_1$, $11\text{-}0 = r_2$ y el ángulo que forman estos lados es de $\frac{360}{5} : 2 = 36°$;

La altura $\underline{OA}$ de este triángulo, correspondiente a 0, es el eje "h" de simetría de las proyecciones en II de los vértices del arquimediano; este eje forma un ángulo "ε" (negativo) con el lado 0-6.

En la resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos, cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se obtiene otro de sus ángulos por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

que aplicada al caso particular de la figura 4, haciendo

$$a = r_2 \,; \quad b = r_1 \quad \gamma = 36° \,. \; y \quad \alpha = \widehat{0\text{-}6\text{-}11}$$

y siendo

$$\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} 36° = 0{,}58\,77\,85\,3 \ldots$$

$$\cos \gamma = \cos 36° = 0{,}80\,90\,16\,9 \ldots$$

y que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varepsilon$, tendremos:

$$tg\ \alpha = ctg\ \varepsilon = \frac{r_2 \operatorname{sen} 36^\circ}{r_1 - r_2 \cos 36^\circ} \qquad \text{de donde}$$

$$tg\ \varepsilon = \frac{r_1 - r_2 \cos 36^\circ}{r_2 \operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{1,4593431 \ldots l - 1.6529419 \times 0,8090169 \ldots l}{1,6529419 \times 0,5877853 \ldots \times l} =$$

$$= \frac{1,4593431 - 1.3372579}{0.9715750} = \frac{0.1220852}{0.9715750} = 0,1256570$$

$$\boxed{\varepsilon = 7^\circ\ 9'\ 43,5''}$$

$$lg\ tg\ \varepsilon = \bar{1},0991867 = lg\ 0.1256570$$

En la página siguiente damos un resumen tabulado de las magnitudes complementarias calculadas.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 80 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares, de lado 25,5 mm de forma que en cada vértice concurran 4 triángulos y 1 cuadrado.

Lámina 34	Poliedros arquimedianos Arquimediano II	Hoja nº 40

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ l$	0, 86 60 25 ... l
f_1	$2\,(c_5 - g_1)$	3, 17 35 93 ... l
f_2	$2\,(c_5 - g_2)$	2, 76 79 51 ... l
f_3	$2\,(c_5 - g_3)$	1, 64 19 60 l
f_4	$2\,(c_5 - g_4)$	0, 98 56 17 l
f_5	$2\,(c_5 - g_5)$	0, 28 97 17 l
g_1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\ 62°\ 55'\ 47{,}4''\ l$	0, 39 41 12 l
g_2	$\cos\ 53°\ 20'\ 58''\ l$	0, 59 69 33 ... l
g_3	$g'_3\ \cos\ 26°\ 33'\ 54.2''$	1, 15 79 28 l
g_4	$g'_4\ \cos\ 26°\ 33'\ 54{,}2''$	1, 48 81 00 ... l
g_5	$g'_5\ \cos\ 26°\ 33'\ 54.2''$	1, 83 60 50 l
r_1	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2}$	1, 45 93 43 ... l
r_2	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2}$	1, 65 29 42 l
r_3	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2}$	1, 99 33 88 l
r_4	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_4}{2}\right)^2}$	2, 09 87 48 l
r_5	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f_5}{2}\right)^2}$	2, 15 09 58 l
ω	$\operatorname{sen} \omega = \frac{g_2 - g_1}{\cos\ 26°\ 33'\ 54{,}2''}$	$\operatorname{sen} \omega = 0.22\ 67\ 60\ 8$ $\omega = 13°\ 6'\ 23{,}2''$
ε	$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r_1 - r_2 \cos 36°}{r_2\ \operatorname{sen} 36°}$	$\operatorname{tg} \varepsilon = 0{,}12\ 56\ 57\ 0$ $\varepsilon = 7°\ 9'\ 43{,}5''$

UNE A4 210 X 297

CCO		5 - 2 - 73

ESTUDIO COMPLEMENTARIO AL CÁLCULO DEL RADIO "m" DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA AL POLÍGONO OBTENIDO AL UNIR LOS EXTREMOS DE LAS ARISTAS DE UN ÁNGULO SÓLIDO DE UN POLIEDRO ARQUIMEDIANO. – – –

En el estudio de dicha magnitud "m" en los arquimedianos I y II, y exclusivamente en éstos, se presenta el problema geométrico y analítico de la determinación de dicha magnitud, en el que el polígono que se forma al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido, es un pentágono irregular (plano), de cuatro lados iguales y un quinto desigual, mayor que los anteriores.

Enfocado desde el punto de vista geométrico, el problema planteado puede enunciarse de la forma siguiente:

PROBLEMA

" Inscribir un pentágono irregular "
" en una circunferencia, tenien- "
" do aquél cuatro lados iguales "
" (l), y uno desigual (a), siendo "
" $a > l$. —————————— "

Para que el problema sea posible, es preciso demostrar:

<u>1º</u> Si existe algun limite entre la relación de "a" y "l", en el que el problema no tenga solución.

<u>2º</u> Si existe, al menos, una cierta relación entre "a" y "l", en que se pueda construir un pentágono de las condiciones del enunciado, y que esté a su vez "inscrito en una circunferencia"

En efecto, y con respecto al punto 1º, construyamos (fig. 1) un pentágono irregular A-B-C-D-E, con las condiciones del enunciado, es decir, en el que se verifique que $BC = CD = DE = EA = l$ y $AB = a$; ciendo $a > l$, el cual podrá obtenerse siempre y cuando se tenga que

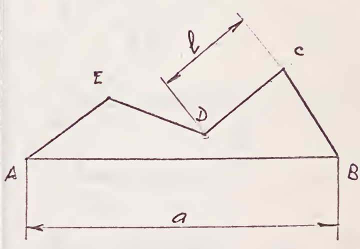


Figura 1

$$BC + CD + DE + EA > AB,$$

o sea que $4l > a$, o su equivalente

$$\frac{a}{l} < 4 \qquad (1)$$

para valores de $\frac{a}{l} \geqq 4$, el problema no tiene solución geométrica. Por el contrario, para valores de

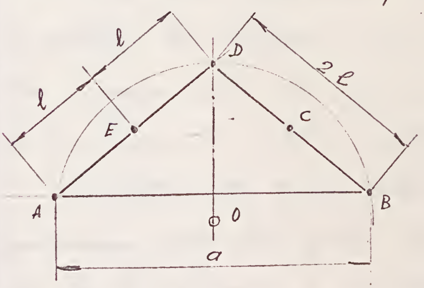
$0 < \frac{a}{l} < 4$, el problema tiene siempre solución.

Esto nos indica que "l" puede variar entre los valores

$$\frac{a}{4} < l < \infty \qquad (3)$$

Vamos a demostrar seguidamente la propiedad de que un pentágono irregular de las condiciones del enunciado, en el que se verifique la condición (2), es inscriptible en una circunferencia (punto 2º).

Para ello supongamos el pentágono dado como un sistema de varillas rígidas, articuladas en sus vértices; de esta forma podemos transformar el pentágono de la figura 1 en un triángulo isósceles, según se representa en la figura 2, en el que los vértices E y C estén alineados con los A, D y B, D, respectivamente.



Tracemos a continuación la circunferencia de centro O, circunscrita al triángulo A-D-B. Los puntos E y C son pues, <u>interiores</u> a dicha circunferencia, por ser puntos intermedios de los segmentos A-D y D-B, y éstos cuerdas de dicha circunferencia.

Transformemos de nuevo el pentágono de la figura 1, hasta conseguir que los vértices E, D y C,

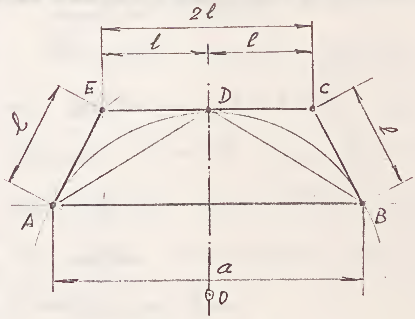


Figura 3

estén alineados, según se representa en la figura 3; el pentágono dado se transforma en el trapecio isósceles A-B-C-E, en el que el vértice D es el centro de la base E-C.

Unamos a continuación D, con A y B, y tracemos la circunferencia circunscrita al triángulo A-D-B (también isósceles); la recta E-C, será pues tangente a dicha circunferencia (su centro O está en el eje de simetría del trapecio A-B-C-E y del triángulo A-D-B). Por consiguiente los puntos E y C, pertenecientes a dicha tangente serán <u>exteriores</u> a dicha circunferencia.

Considerando que podemos pasar de una forma continua del triángulo de la figura 2 al trapecio de la figura 3 mediante el acercamiento del vértice D a su lado A-B, supuesto éste inmóvil, y que en cada posición trazamos la circunferencia circunscrita al triángulo A-D-B, los puntos C y E, pasarán de una determinada posición <u>interior</u> de una circunferencia, a otra <u>esterior</u> sumamente próxima, y por consiguiente por otra intermedia que los contenga.

En esta posición límite, el pentágono dado, estará inscrito en una circunferencia (s. s. q. d.).

SOLUCION GRAFICA

No existe solución gráfica exacta, con la regla y compás, al problema planteado de encontrar la anterior circunferencia límite, ya que como veremos a continuación, la solución analítica para la obtención del radio "m" de dicha circunferencia conduce a la resolución de una ecuación cúbica.

SOLUCION ANALITICA

Supongamos el problema resuelto en un caso cualquiera, en que se cumpla la condición (2) de ser

$$\frac{a}{4} < l < \infty$$

según se representa en la figura 4.*

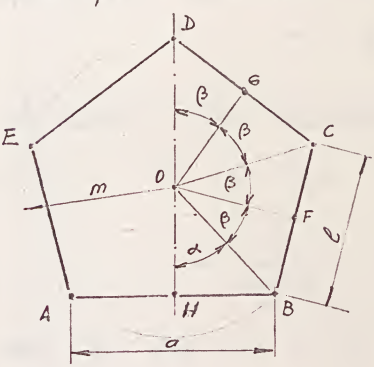


Figura 4

La solución de este problema se consigue al obtener la magnitud del radio "m" de la circunferencia circunscrita al pentágono irregular A-B-C-D-E que tiene 4 lados iguales (l) y uno desigual (a) (a > l).

* La figura 4 es análoga a la fig. 1 de la lámina 33, que utilizamos en la solución del Arquimediano I

Dicho pentágono tendrá un eje de simetría DH sobre el que se encuentra el centro O de la circunferencia pedida; dicho eje es la mediatriz del lado AB (a), y pasará pues por el punto H, medio del segmento AB

Unamos los vértices B y C con el centro O, así como los F y G, centro de los lados DC y CD respectivamente. Con esto se nos formará el angulo $\widehat{H\text{-}O\text{-}B} = \alpha$ y los todos iguales $\widehat{B\text{-}O\text{-}F} = \widehat{F\text{-}O\text{-}C} = \widehat{C\text{-}O\text{-}G} = \widehat{G\text{-}O\text{-}D} = \beta$, verificándose que

$$\alpha + 4\beta = \pi \qquad (3)$$

El radio "m" buscado se puede obtener en función de "β" y "l", ya que $OB = \dfrac{BF}{\operatorname{sen}\beta}$, o sea

$$m = \frac{\frac{l}{2}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{l}{2\operatorname{sen}\beta} \qquad (4)$$

Para la obtención de "β" seguiremos el siguiente proceso, de acuerdo con la fig. 4

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{HB}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{m} = \frac{a}{2m} \qquad (5)$$

y también

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{BF}{OB} = \frac{\frac{l}{2}}{m} = \frac{l}{2m} \qquad (6)$$

dividiendo (5) por (6)

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{2m} : \frac{l}{2m} = \frac{a}{l} \qquad (7)$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

pero siendo "α" suplementario de "4β", se verificará:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 4\beta \qquad (8)$$

y teniendo en cuenta (7) y (8)

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\ell} \qquad (9)$$

Desarrollando la (9)

$$\frac{a}{\ell} = \frac{\operatorname{sen} 4\beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} [2 \times (2\beta)]}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta}{\operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \times (2 \cos^2 \beta - 1)}{\operatorname{sen} \beta} = 4 \cos \beta \left(2 \cos^2 \beta - 1\right) =$$

$$= 8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta$$ o sea

$$8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta = \frac{a}{\ell}$$

de donde

$$\cos^3 \beta - \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{a}{8\ell} = 0 \qquad (10)$$

ecuación cúbica en "$\cos \beta$". - Haciendo $\cos \beta = x$, será

$$x^3 - \frac{1}{2} x - \frac{a}{8\ell} = 0 \qquad (11)$$

Las tres raíces de esta ecuación pueden obtenerse aplicando la "Fórmula de Cardano", que exponemos a continuación.

Para ello, transformemos previamente la ecuación (11),* haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \quad y \quad q = -\frac{a}{8\ell}$$

por lo que tendremos

$$x^3 + px + q = 0 \tag{12}$$

forma reducida de una ecuación cúbica completa.

Haciendo por otra parte

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

la fórmula de Cardano expresa que

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \tag{13}$$

siendo x_1 una de las tres raíces de la ecuación (12). Las dos raíces restantes "x_2" y "x_3" se obtienen reduciendo la cúbica (12) a una cuadrada, al dividir dicha ecuación por "$x - x_1$".- Estas dos raíces restantes pueden ser reales o imaginarias.

Para que la primera raíz "x_1" sea real, es necesario se verifique en (13) que

$$R \geqq 0 \tag{14}$$

---

* Ver "Matemáticas para Ingenieros y Técnicos" de R. Dörfling, pág. 58.- Editorial Gustavo Gili, S.A.- Barcelona 1945.

por lo que también será $\sqrt{R} \gtreqless 0$.

En el caso de ser $R > 0$, tendremos una raiz real y dos imaginarias.

Si fuese $R = 0$, las tres raices son reales, siendo dos de ellas iguales $(x_2 = x_3)$.

En el caso de ser $R < 0$ (caso irreducible), su solución obliga a operar en el campo complejo, obteniéndose tres raices reales diferentes.

SOLUCION DEL PROBLEMA EN CASOS PARTICULARES

1º Caso Arquimediano I

Vamos a hacer uso de la solución general planteada, a diversos casos particulares, comenzando por el del "Arquimediano I".

En éste se verifica que $\frac{a}{l} = \sqrt{2}$, siendo por consiguiente

$$\boxed{l} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = \boxed{0.70\ 71\ 06\ 8 \ldots\ a}$$

en la ecuación cúbica (11) será

$$\frac{a}{8l} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

y haciendo $\quad p = -\frac{1}{2} \quad$ y $\quad q = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

será $\quad R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$

$= \dfrac{2^3 \times 3^3 - 2^7}{2^{10} \times 3^3} = \dfrac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} > 0$ y por consiguiente

$\sqrt{R} = \sqrt{\dfrac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3}} = \sqrt{\dfrac{11}{3456}} > 0$ por lo que tendremos

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{3}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} : 2\right) + \sqrt{\frac{11}{3456}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} : 2\right) + \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}} \cong$$

$$\cong 0{,}84\ 25\ 07\ 20 = \cos\beta$$

$$\boxed{\beta = 32^\circ\ 35'\ 38{,}3''}$$

(ver desarrollo y aplicación de este cálculo, en lam. 33).
Las dos raíces restantes son imaginarias

2º Caso Arquimediano II

En éste se verifica que $\quad \dfrac{a}{l} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

siendo por consiguiente

$$\boxed{l} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\,a = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}\,a \cong \boxed{0{,}61\ 80\ 33\ 99 \ldots a}$$

en la ecuación cúbica (11) será:

$$\frac{a}{8l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2 \times 8} = \frac{\sqrt{5}+1}{16}$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0$$

y haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \qquad q = -\frac{\sqrt{5}+1}{16}$$

será $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{16 \times 32} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{(3+\sqrt{5}) \times 2^3 \times 3^3 - 2^9}{2^{12} \times 3^3} = \frac{(3+\sqrt{5}) \times 3^3 - 2^6}{2^9 \times 3^3} = \frac{3^4 - 2^6 + 3^3\sqrt{5}}{2^9 \times 3^3} =$$

$= \frac{17 + 27\sqrt{5}}{13\,824} > 0$ y por consiguiente $\sqrt{R} > 0$

por lo que tendremos:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} +$$

$$\sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16} : 2\right) - \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32} + \sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13\,824}}} \cong$$

$$\cong 0,85\ 77\ 80\ 67 \ldots = \cos\beta$$

$$\boxed{\beta = 30^\circ\ 55'\ 54,1''}$$

Las dos raíces restantes son imaginarias

<u>3º caso límite en que $\frac{a}{l} = 4$</u>

En este caso será $\boxed{l} = \frac{a}{4} = \boxed{0,25 \times a.}$

UNE A4 210 X 297

en la ecuación cúbica (11) será:

$$\frac{a}{8\ell} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

donde se ve de inmediato que tiene una raíz real $\underline{x_1 = 1}$, que la verifica, y que al dividir la ecuación por $x - x_1 = x - 1$, da lugar a otra de segundo grado con sus dos raíces restantes x_2 y x_3 imaginarias conjugadas.

Si independientemente de esto, aplicamos la fórmula general de Cardano, haciendo

$$p = -\frac{1}{2} \qquad q = -\frac{1}{2}$$

será $\quad R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} =$

$= \frac{2^3 \times 3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} = \frac{3^3 - 2}{2^4 \times 3^3} = \frac{25}{2^4 \times 3^3} = \frac{5^2}{2^4 \times 3^3} > 0$ y por consiguiente

$$\sqrt{R} = \sqrt{\frac{5^2}{2^4 \times 3^3}} = \frac{5}{2^2 \times 3 \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{36} > 0$$

por lo que tendremos:

$$\boxed{x_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2} : 2\right) + \frac{5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2} : 2\right) - \frac{5\sqrt{3}}{36}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{36}} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{9 + 5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 5\sqrt{3}}{36}}}$$

mas teniendo en cuenta el valor de "x_1" ya obtenido anteriormente, podemos escribir la notable propiedad numérica siguiente:

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{9+5\sqrt{3}}{36}}+\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{36}}=1}$$

$\cos\beta = 1$

$\beta = 0°$

Las dos raíces restantes son imaginarias

4° Caso límite en que $\frac{a}{l}=0$

En este caso será $\quad l=\frac{a}{0}=\infty$

en la ecuación cúbica (11), tendremos

$$\frac{a}{8l}=\frac{0}{8}=0$$

por lo que aquélla se transformará en

$$x^3-\frac{1}{2}x-0=0$$

o sea $\quad x^3=\frac{1}{2}x \qquad x^2=\frac{1}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} x_2=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_3=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{c}\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta=45°\end{array}}$

Si aplicamos la fórmula general de Cardano, tendremos, haciendo

$$p=-\frac{1}{2} \qquad q=0$$

$$R=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(-\frac{1}{2\times 3}\right)^3=-\frac{1}{2^3\times 3^3} \quad \text{y de aquí}$$

$$\sqrt{R}=\sqrt{-\frac{1}{2^3\times 3^3}}=\frac{1}{6}\times\sqrt{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{6}\,i=\frac{\sqrt{6}}{36}\,i$$

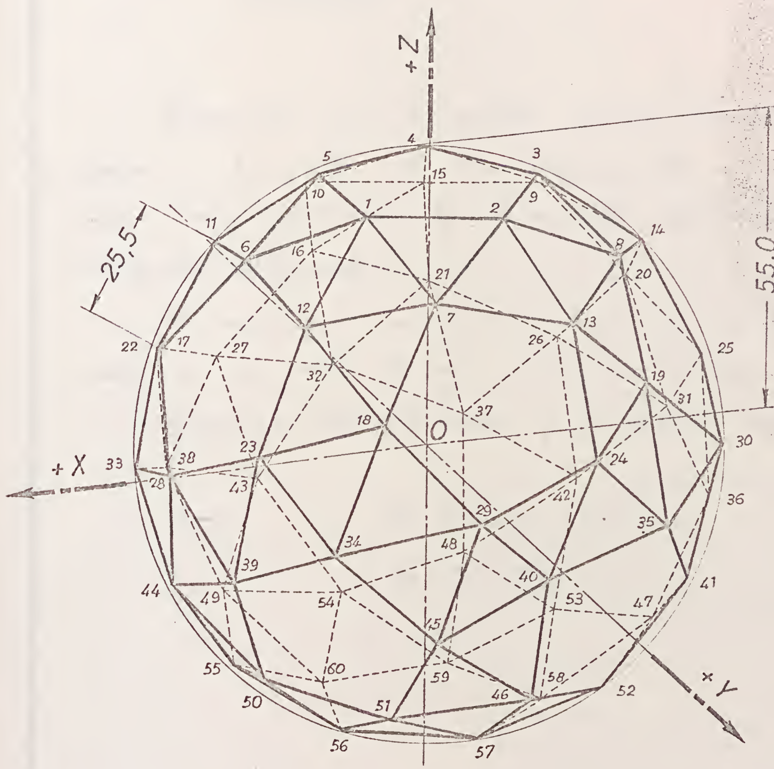
por lo que será

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}\,i} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{6}}{36}\,i} = -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos\beta = 0 \\ \beta = 90^\circ \end{array}}$$

En el problema planteado sólo tiene sentido geométrico la raíz "x_2"

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \beta = 45^\circ$$



Arquimediano II

ENUNCIADO

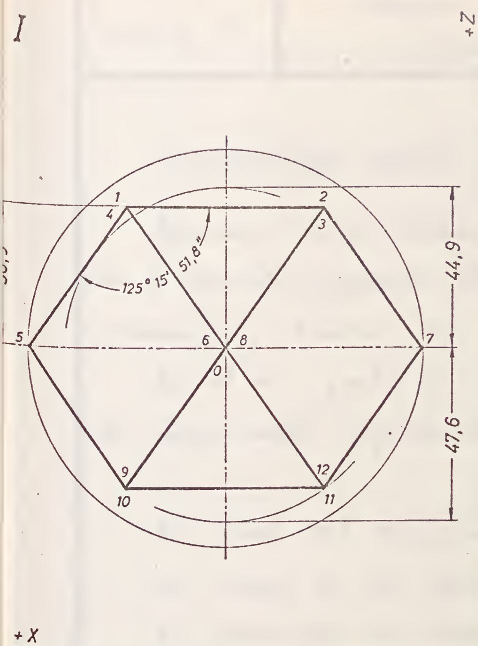
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano III en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos cuadrados, alternados.

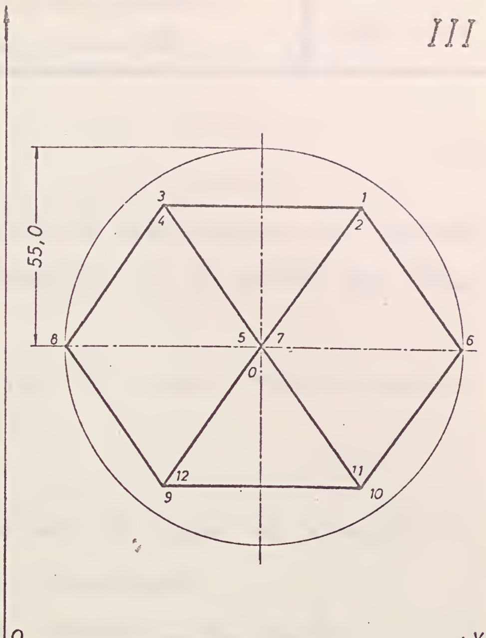
La longitud de su lado es de 55 mm. y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

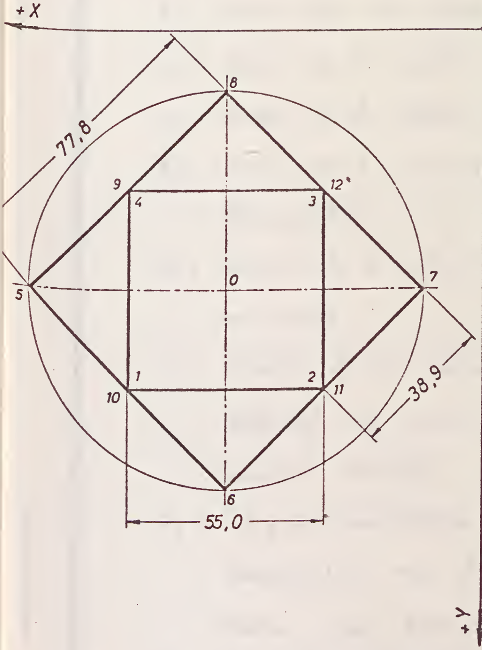
Dibujar en formato A3V. y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_{III} = 55 mm.







ARQUIMEDIANO III

Número de caras triangulares	C_3 = 8
Número de caras cuadradas	C_4 = 6
Número de vértices	V = 12
Número de aristas	A = 24
Número de caras de un ángulo sólido:	$2C_3 + 2C_4$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano III, en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos cuadrados.

La longitud de su lado es de 55 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Arquimediano III					Lámina 35 / Curso 19 - 19

[illegible]

[illegible]

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano III (dato del ejercicio)

a : Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares

c_4 : Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arqui-

mediano, que pasa por una arista de aquélla.

$\hat{\ }_{3\text{-}4}$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra cuadrada.

S : Superficie

V : Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que tiene 8 caras regulares triangulares, y 6 caras cuadradas; 12 vértices y 24 aristas.

En cada vértice concurren 2 caras triangulares, 2 cuadradas y, por consiguiente, 4 aristas del mismo.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{Arquimediano III} \quad (2\,P_3 + 2\,P_4);\ C_3 = 8;\ C_4 = 6;\ V = 12;\ A = 24}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un án-

gulo sólido.

Este polígono es un rectángulo ABCD (fig. 1), uno de cuyos lados es el lado del arquimediano (lado de las caras triangulares) y el otro la diagonal de las caras cuadradas.

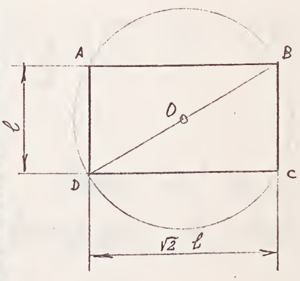


Figura 1

El radio pedido será la semidiagonal OD de dicho rectángulo.

Su valor será pues

$$\overline{OD} = \boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + (\sqrt{2}\,\ell)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell} = 0{,}86\ 60\ 25\ 4\ldots\ \ell$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33) a este caso particular de "m"

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\right)^2}} = \boxed{\ell}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\right)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{3}{4}\ell^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{1 - \frac{3}{4}}\ \ell} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \ell$$

UNE A4 210 X 297

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell} = 0{,}86\;60\;25\;4\ldots\,\ell$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell} = 0{,}57\;73\;50\;27\ldots\,\ell$$

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell} = 0{,}70\;71\;06\;8\ldots\,\ell$$

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell} = 0{,}81\;64\;96\;58\ldots\,\ell$$

Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ell} = 0.70\ 71\ 06\ 8\ldots\ \ell$$

Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33):

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4\,(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \boxed{2\sqrt{2}} = 2,82\ 84\ 27\ 12\ldots$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3} - 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{2 \times 3\sqrt{2}}{3} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 2.82\ 84\ 27\ 12 = 0.451\ 54\ 50 \qquad \boxed{\alpha_3 = 70^\circ\ 31'\ 43,6''}$$

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2\ c_4}{\sqrt{4\,(d_4)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\,l}{\sqrt{4\,(\frac{\sqrt{2}}{2}\,l)^2 - l^2}} = \boxed{\sqrt{2}} = 1{,}41\ 42\ 13\ 56 \ldots$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\,l}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,l\right)^2 - l^2}} = \frac{\sqrt{2}\ l}{\sqrt{(2-1)\,l^2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$lg\ tg\ \alpha_4 = log.\ 1{,}41\ 42\ 13\ 56 = 0{,}150\ 51\ 50$ $\qquad \boxed{\alpha_4 = 54^\circ\ 44'\ 8{,}2''}$

Ángulo rectilíneo "φ_{3-4}" del diedro formado por una cara triangular y una cuadrada

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6'' + 54^\circ\ 44'\ 8{,}2'' =$$

$$= \boxed{125^\circ\ 15'\ 51{,}8''}$$

Comprobación:

Siendo $\varphi_{3-4} = \alpha_3 + \alpha_4$, tendremos que

$$tg\ \varphi_{3-4} = \frac{tg\,\alpha_3 + tg\,\alpha_4}{1 - tg\,\alpha_3\ tg\,\alpha_4} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{1-4} = -\sqrt{2} = -\ tg\,\alpha_4$$

y por lo tanto:

$\varphi_{3-4} + \alpha_4 = 125^\circ\ 15'\ 51{,}8'' + 54^\circ\ 44'\ 8{,}2'' = 180^\circ$ (suplementarios)

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de 8 caras triangulares y 6 cuadradas, de lado "l"; la superficie total será:

$$\boxed{S} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 6 l^2 = \left(2\sqrt{3} + 6\right) l^2 = \boxed{2\left(\sqrt{3}+3\right) l^2} = 9,46\ 41\ 01\ 62 \ldots l^2$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 6 pirámides de base cuadrada y altura "c_4"; su valor será:

$$\boxed{V} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{c_3}{3} + 6 l^2 \times \frac{c_4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot l^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} l + 2 l^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} l =$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{3} l^3} = 2,35\ 70\ 22\ 60 \ldots l^3$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3} l^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} l + 2 \cdot l^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} l = \left(\frac{2\sqrt{18}}{9} + \sqrt{2}\right) l^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right) l^3 =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{3} l^3.$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros y

6 cuadrados, de lado 55 mm, de forma que en cada vértice concurran 2 triangulos y 2 cuadrados alternados.

A continuación damos un resumen tabulado de las anteriores magnitudes calculadas.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	ℓ	$1.00\ 00\ 00 \ldots \ell$
b	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$	$0.86\ 60\ 25 \ldots \ell$
c_3	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ell$	$0,81\ 64\ 97 \ldots \ell$
c_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$	$0.70\ 71\ 07 \ldots \ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ell$	$0.57\ 73\ 50 \ldots \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$	$0,70\ 71\ 07 \ldots \ell$
m	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$	$0,86\ 60\ 25 \ldots \ell$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 2\sqrt{2}$	$tg.\ \alpha_3 = 2.82\ 84\ 27 \ldots$ $\alpha_3 = 70° \ 31' \ 43,6''$
α_4	$tg.\ \alpha_4 = \sqrt{2}$	$tg\ \alpha_4 = 1,41\ 42\ 14 \ldots$ $\alpha_4 = 54° \ 44' \ 8.2''$
φ_{3-4}	$\alpha_3 + \alpha_4$	$\varphi_{3-4} = 125° \ 15' \ 51,8''$
S	$2(\sqrt{3}+3)\ell^2$	$9,46\ 41\ 02 \ldots \ell^2$
V	$\frac{5\sqrt{2}}{3}\ell^3$	$2,35\ 70\ 23 \ldots \ell^3$

Relaciones entre magnitudes

$a = \ell \qquad b = m \qquad c_4 = d_4$

Lámina 35	Poliedros arquimedianos Arquimediano III	Hoja nº 9

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 35, a la representación del Arquimediano III cuyo lado conocido, es de 55 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{III} = (dato del ejercicio) = 55,0 mm

$a = l_{III}$ = = 55,0 mm

b = 0,86 60 25 .... × 55 = 47,6 mm

c_3 = 0,81 64 97 .... × 55 = 44,9 mm

c_4 = 0,70 71 07 .... × 55 = 38,9 mm

d_3 = 0,57 73 50 .... × 55 = 31,7 mm

d_4 = 0,70 71 07 .... × 55 = 38,9 mm

El orden de operaciones para el trazado gráfico, es el siguiente:

1º Situar el centro O de coordenadas 72, 72, 85.

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55 mm.

3º Representar en I, II y III la cara cuadrada 1-2-3-4, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y un lado (1-4) perpendicular a I (utilícese la cota "c_4" en I y III).

4º Trazar en II el cuadrado 5-6-7-8, circunscrito al 1-2-3-4 (lados perpendiculares a las diagonales).

		24 - 2 - 73

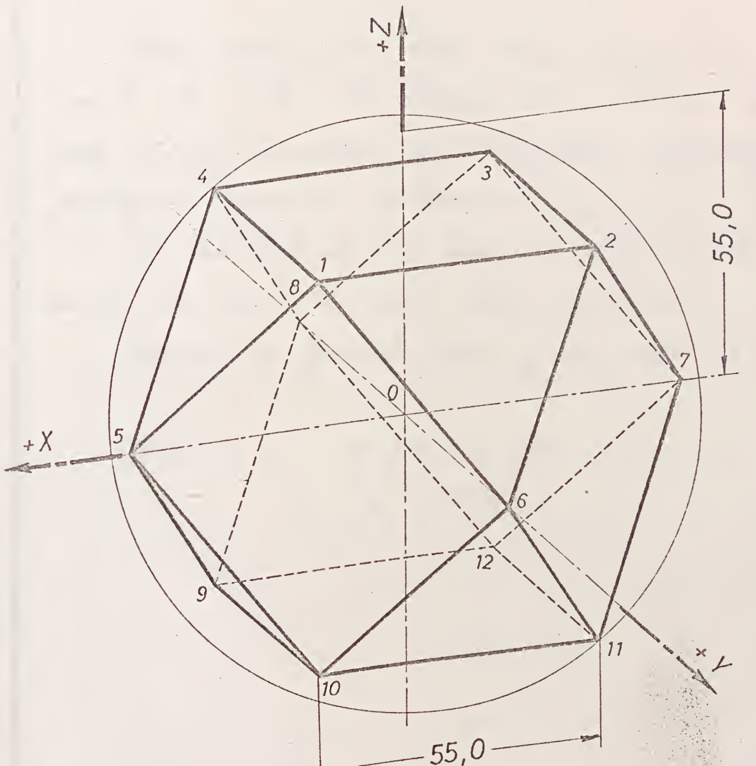
Lámina 35	Poliedros arquimedianos Arquimediano III	Hoja nº 10

5º Con el trazado ya realizado, puede terminarse la representación en I y III, por simetría axial, pudiendo observarse que son iguales de forma, pero no en lo que respecta a la colocación de vértices

6º Numerar los vértices y comprobar en el dibujo las magnitudes "b", "c_3" y "$d_4 = c_4$".

---

		31 - 3 - 73



Arquimediano III

ENUNCIADO

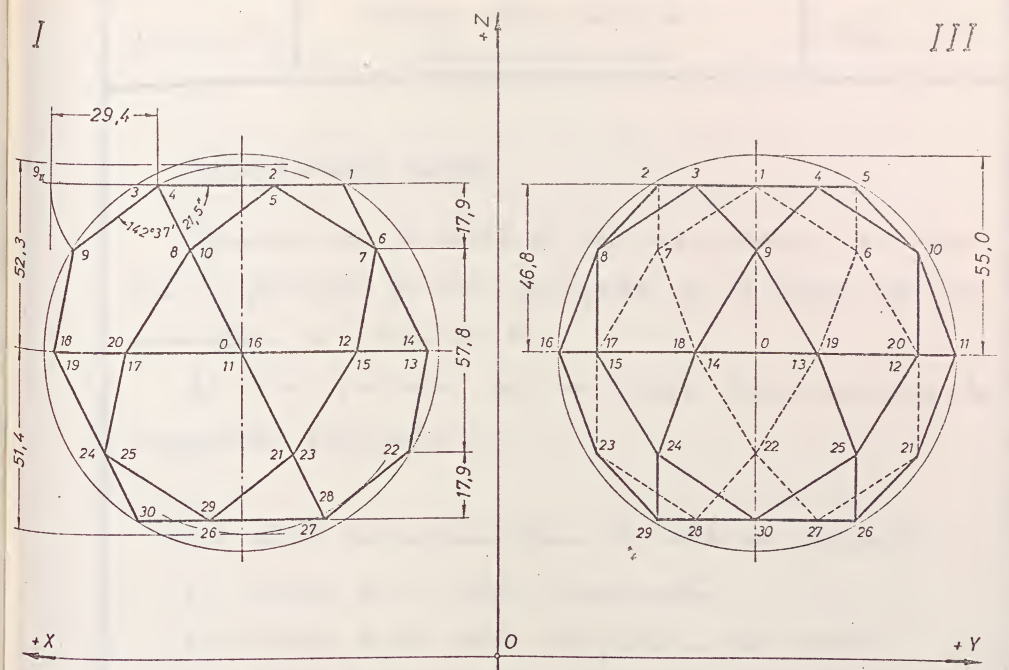
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IV en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos pentágonos regulares, alternados.

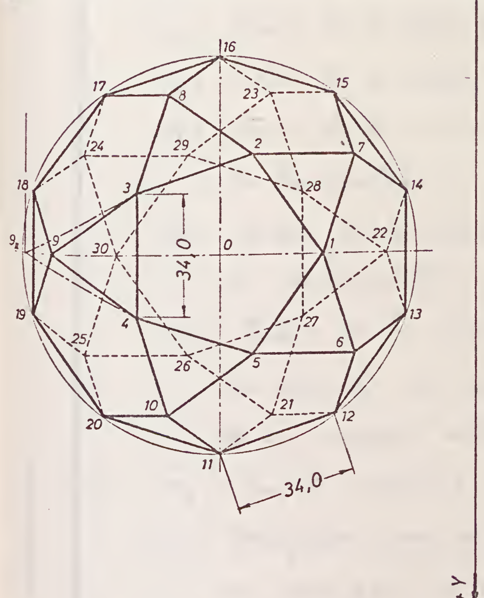
La longitud de su lado es 34 mm y las coordenadas de su centro O, son O(72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1

DATOS $O\,(72,\ 72,\ 85)$ mm

$l_{IV} = 34$ mm





ARQUIMEDIANO IV

Número de caras triangulares..........	C_3 = 20
Número de caras pentagonales........	C_5 = 12
Número de vértices....................	V = 30
Número de aristas......................	A = 60
Número de caras de un ángulo sólido:	$2C_3 + 2C_5$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IV, en el que en cada vértice concurren dos triángulos equiláteros y dos pentágonos regulares.

La longitud de su lado es de 34 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano IV					Lámina 36 Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del arquimediano IV. (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_5 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara pentagonal regular, con el plano diametral del

arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

$\varphi_{3\text{-}5}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra pentagonal.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 20 caras triangulares regulares, y 12 caras pentagonales regulares; 30 vértices y 60 aristas.

En cada vértice concurren alternadamente 2 caras triangulares y dos pentagonales y, por consiguiente, 4 aristas del mismo.

Así pues, tendremos que

ARQUIMEDIANO IV $(2\ P_3 + 2\ P_5)$; $C_3 = 20$; $C_5 = 12$; $V = 30$; $A = 60$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.

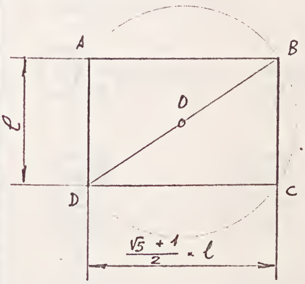


Figura 1

Este polígono es el rectángulo A·B·C·D (fig. 1), uno de cuyos lados es el lado del arquimediano (lado de las caras triangulares) y el otro es la diagonal del pentágono de lado "ℓ" de su cara contigua.

El valor de la diagonal del pentágono regular, en función de su lado, se demuestra en Geometría es

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell \;.$$

El radio pedido será la semidiagonal OD de dicho rectángulo. Su valor será pues

$$OD = \boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\;\ell} = 0{,}95\ 10\ 56\ 51\ldots\ \ell$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}\,\ell^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}}\;\ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{6+2\sqrt{5}}{4}}\;\ell = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\;\ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\;\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\;\ell}$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33), a este caso particular.

$$\boxed{a} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, l\right)^2}} = \frac{l}{2\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}\, l = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{3-\sqrt{5}}\, l = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} \times (3+\sqrt{5})}{4}\, l = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{4(3+\sqrt{5})}{8}}\, l = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\, l = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\, l = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\, l = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l} =$$

$$= 1.61\ 80\ 33\ 99 \ldots\, l$$

(igual a la diagonal de una cara pentagonal)

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}} \times l = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-1}{4}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}\, l = \boxed{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l} = 1.53\ 88\ 41\ 76 \ldots\, l$$

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado l

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l} = 0,\ 57\ 73\ 50\ 27 \ldots\, l$$

...dio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara ...agonal.

... demuestra en Geometría es

$$\boxed{d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l} = 0,85\ 06\ 50\ 8 \dots l$$

...adio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangu-...lares regulares de lado "l"

...plicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\sqrt{a^2-(d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,l\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{3}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}-2}{6}}\; l = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\; l = \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{6}}\; l = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}}\; l = \left(\sqrt{\frac{9}{12}}+\sqrt{\frac{5}{12}}\right)\times l =$$

$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) l = \left(\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{15}}{6}\right) l = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\; l} = 1,51\ 15\ 22\ 63 \dots l$$

...adio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales ... lado "l"

...plicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\sqrt{a^2-(d_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,l\right)^2-\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l\right)^2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}-5-\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{10}}\; l = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\; l} = 1,37\ 63\ 81\ 9 \dots l$$

Ángulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6} l}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} l\right)^2 - l^2}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{9+\sqrt{45}}{3} = \frac{9+3\sqrt{5}}{3} = \boxed{3+\sqrt{5}} = 5,23\ 60\ 67\ 98\ldots$$

$lg\ tg\ \alpha_3 = 0,719\ 00\ 52$ $\boxed{\alpha_3 = 79^\circ\ 11'\ 15,7''}$

Ángulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de la tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_5} = \frac{2c_5}{\sqrt{4(d_5)^2 - l^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2 - l^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} - 1}} = \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5} - 1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} : \frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \boxed{2}$$

$lg\ tg\ \alpha_5 = lg\ 2 = 0,30\ 10\ 30\ 0$ $\boxed{\alpha_5 = 63^\circ\ 26'\ 5,8''}$

Angulo rectilíneo "$\varphi_{3\cdot5}$" del diedro formado por una cara triangular y una pentagonal regulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-5}} = \alpha_3 + \alpha_5 = 79^\circ\ 11'\ 15{,}7'' + 63^\circ\ 26'\ 5{,}8'' =$$

$$= \boxed{142^\circ\ 37'\ 21{,}5''}$$

COMPROBACION

$$\operatorname{tg} \varphi_{3-5} = \operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_5) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\alpha_5}{1 - \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_5} = \frac{(3+\sqrt{5}) + 2}{1 - (3+\sqrt{5}) \times 2} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{1-6-2\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{-5-2\sqrt{5}} = -\frac{5+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} = -\frac{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{5} =$$

$$= -\frac{25+5\sqrt{5}-10\sqrt{5}-10}{5} = -\frac{15-5\sqrt{5}}{5} = -(3-\sqrt{5}) = -0{,}76\ 39\ 32\ 02\ldots$$

$$-\lg \operatorname{tg} \varphi_{3-5} = \lg 0.76\ 39\ 32\ 02 = \bar{1},883\ 05\ 48$$

$$-\varphi_{3-5} = -37^\circ\ 22'\ 38{,}5''$$

$$\boxed{\varphi_{3-5}} = 180^\circ - 37^\circ\ 22'\ 38{,}5'' = \boxed{142^\circ\ 37'\ 21{,}5''}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 caras triangulares y 12 caras pentagonales, ambas regulares y de lado "l"; la su-

perficie será:

$$\boxed{S} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}\, l^2 = \boxed{\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right) l^2} =$$

$$= \left(8.66\,02\,54\,1 + 20,64\,57\,28\,8\right) l^2 = 29,30\,59\,82\,9 \ldots\, l^2$$

<u>Volumen "V" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de 20 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 12 pirámides de base pentagonal regular y altura "c_5"; su valor será:

$$\boxed{V} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2 \times \frac{c_3}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}\, l^2 \times \frac{c_5}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\, l^2 \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}\, l +$$

$$+ \frac{3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{3}\, l^2 \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\, l = \left(\frac{5 \times \left(3\sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{15}\sqrt{3}\right)}{18} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\right) l^3 = \left(\frac{5\left(9 + 3\sqrt{5}\right)}{18} + \sqrt{\frac{\left(25 + 10\sqrt{5}\right)\left(5 + 2\sqrt{5}\right)}{5}}\right) l^3 =$$

$$= \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \sqrt{\frac{125 + 50\sqrt{5} + 50\sqrt{5} + 100}{5}}\right) l^3 = \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 20}\right) l^3$$

$$= \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \sqrt{45 + 20\sqrt{5}}\right) l^3 = \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \sqrt{\left(9 + 4\sqrt{5}\right) \times 5}\right) l^3 =$$

$$= \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \times \sqrt{5}\right) l^3 = \left[\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \left(\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}\right)\sqrt{5}\right] l^3 =$$

$$= \left[\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + \left(\sqrt{5} + 2\right) \times \sqrt{5}\right] l^3 = \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{6} + 5 + 2\sqrt{5}\right) l^3 =$$

Lámina 36	Poliedros arquimedianos Arquimediano IV	Hoja nº 9

$$= \frac{15 + 5\sqrt{5} + 30 + 12\sqrt{5}}{6}\, l^3 = \boxed{\frac{45 + 17\sqrt{5}}{6}\, l^3} = 13,83\,55\,25\,94 \ldots\, l^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares, de lado 34 mm, de forma que en cada vértice concurran 2 triángulos y 2 pentágonos.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l$	$1.61\,80\,34 \ldots\, l$
b	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l$	$1,53\,88\,42 \ldots\, l$
c_3	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\, l$	$1,51\,15\,23 \ldots\, l$
c_5	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l$	$1,37\,63\,82 \ldots\, l$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\, l$	$0,57\,73\,50 \ldots\, l$
d_5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l$	$0.85\,06\,51 \ldots\, l$
m	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, l$	$0,95\,10\,57 \ldots\, l$
α_3	$tg\, \alpha_3 = 3+\sqrt{5}$	$tg\, \alpha_3 = 5,23\,60\,68$ $\alpha_3 = 79^\circ\, 11'\, 15,7''$
α_5	$tg\, \alpha_5 = 2$	$\alpha_5 = 63^\circ\, 26'\, 5,8''$
φ_{3-5}	$\alpha_3 + \alpha_5$ $tg\, \varphi_{3-5} = -(3-\sqrt{5})$	$-tg\, \varphi_{3-5} = 0,76\,39\,32$ $\varphi_{3-5} = 142^\circ\, 37'\, 21,5''$
S	$\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right) l^2$	$29,30\,59\,83 \ldots\, l^2$
V	$\frac{45+17\sqrt{5}}{6}\, l^3$	$13,83\,55\,26 \ldots\, l^3$

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder, en la lámina 36, a la representación gráfica del arquimediano IV.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{IV}" del arquimediano, cuya longitud es de 34 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{IV} = (dato del ejercicio) = 34,0 mm

a = 1,61 80 34... × 34 = 55,0 mm

b = 1,53 88 42... × 34 = 52,3 mm

c_3 = 1,51 15 23... × 34 = 51,4 mm

c_5 = 1,37 63 82... × 34 = 46,8 mm

d_3 = 0,57 73 50... × 34 = 19,6 mm

d_5 = 0,85 06 51... × 34 = 28,9 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 36), es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas 72, 72, 85 mm

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55 mm

3º Representar en I, II y III, la cara pentagonal, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II, y un lado (3-4) perpendicular a I (utilícese la cota "c_5" en I y III, y la "d_5" en II)

4º Obtener en I, las proyecciones del vértice 9 de la cara contigua triangular de arista 3-4 hasta colocar el vértice 9 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en en 3_I, con radio igual a la altura ("h") de la cara 3-4-9 y se trazará un arco que corte en 9_I a la esfera circunscrita.

5º Determinar las proyecciones en II y III de dicho vértice 9, y seguidamente en I, II y III la de los vértices 6, 7, 8 y 10 (dichos vértices son a su vez de un pentágono regular de plano paralelo al II).

6º Determinar en II la posición de los vértices 11 al 20; éstos son los de un decágono regular de lado "l_{IV}" inscrito en una circunferencia de radio "a"; los vértices 11 y 16 están sobre el eje paralelo al "Y".

7º Obtener las proyecciones de los anteriores vértices 11 al 20, sobre I y III; el plano que los contiene es paralelo a II.

8º Obtener las proyecciones en II de los restantes vértices 21 al 31, sabiendo que son simétricos con respecto a un eje paralelo a Y, que pasa por O. Los nº 21, 22, 23, 24,

25, 26, 27, 28, 29, 30 se corresponderán respectivamente con los 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Con esta proyección, y conociendo la altura "f", se puede obtener fácilmente las proyecciones en I y III de los mencionados vértices 21 al 30. Las cotas "b", "c_3", "f" y "g" sirven de comprobación al trazado gráfico.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado (ver lám. 36).

Altura "n" de una cara triangular

Se demuestra en Geometría. es

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0.\ 86\ 60\ 25\ 4\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $n = 0.86\ 60\ 25\ 4 \times 34 = 29.4$ mm.

Distancia "g" de los vértices 6 al 10 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 21 al 25 a la cara pentagonal 26 al 30.

Se obtiene proyectando la altura "n" sobre el plano III;

el ángulo de proyección es de

$$\varphi_{3-5} - 90^\circ = 142^\circ\ 37'\ 21{,}5'' - 90^\circ = 52^\circ\ 37'\ 21{,}5''$$

$$\boxed{g} = n \times \cos 52^\circ\ 37'\ 21{,}5'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 52^\circ\ 37'\ 21{,}5'' \times l =$$

$$= \boxed{0.52\ 57\ 31\ 10\ldots \times l}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{1}{2} \lg 3 = \frac{1}{2} \times 0.477\ 12\ 13 \text{ ———— } = 0{,}238\ 56\ 07$$

$$+ \lg \cos 52^\circ\ 37'\ 21{,}5'' = \text{ ———— } = \bar{1}{,}783\ 23\ 30$$

$$0{,}021\ 79\ 37$$

$$- \lg 2 = \text{ ——— } = 0.301\ 03\ 00$$

$$\boxed{\lg 0.52\ 57\ 31\ 10\ldots} = \bar{1}{,}720\ 76\ 37$$

Para el caso del dibujo, será: $g = 0{,}52\ 57\ 31\ 10\ldots \times 34 = 17{,}9$ mm

---

Distancia "f" entre los dos planos paralelos a Π, que contienen los vértices 6 al 10 y 21 al 25 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_5" y "g", ya calculadas.

$$\boxed{f} = 2\,(c_5 - g) = 2 \times (1{,}37\ 63\ 81\ 9 - 0{,}52\ 57\ 31\ 1)\ l =$$

$$= \boxed{1{,}70\ 13\ 01\ 6\ldots\ l}$$

Para el caso del dibujo, será: $f = 1{,}70\ 13\ 01\ 6 \times 34 = 57{,}8$

[illegible]

Radio "r" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de vértices 6 al 10 y 21 al 25.

Es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y cateto "$\frac{f}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{(1,61\ 80\ 34\ 0)^2 - (0.85\ 06\ 50\ 8)^2} = \boxed{1,37\ 63\ 81\ 9\ldots\ \ell}$$

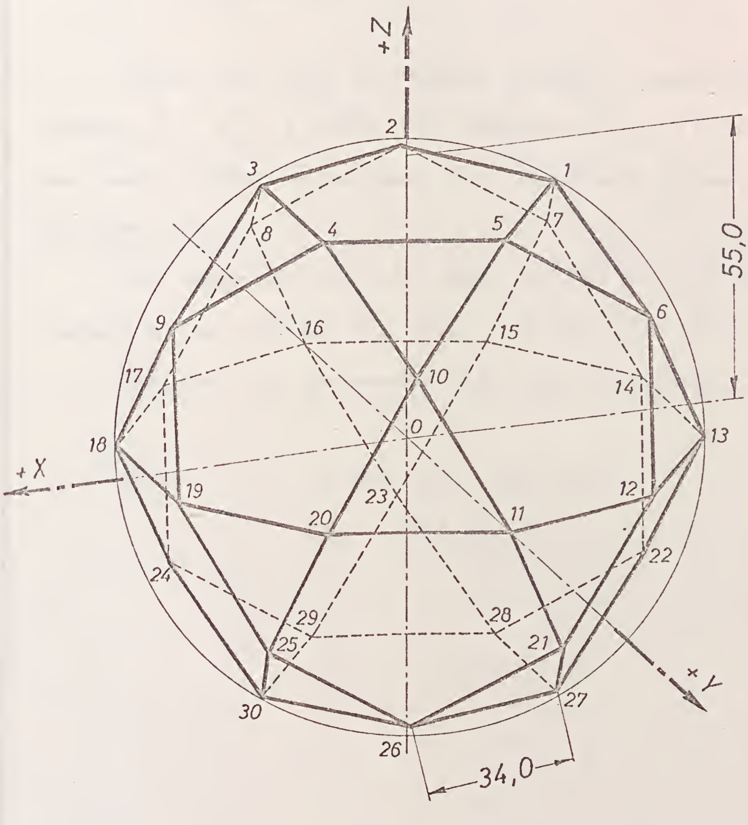
Para el caso del dibujo, $r = 46,8$ mm.

A continuación resumimos los valores anteriores.

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	$0,86\ 60\ 25\ldots\ \ell$
g	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 52^\circ\ 37'\ 21,5''$	$0,52\ 57\ 31\ldots\ \ell$
f	$2(c_5 - g)$	$1.70\ 13\ 02\ldots\ \ell$
r	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2}$	$1,37\ 63\ 82\ldots\ \ell$

UNE A4 210 X 297



Arquimediano IV

Lámina 37	Poliedros arquimedianos Arquimediano V ($1 P_3 + 3 P_4$)	37

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano V en el que en cada vértice concurren tres cuadrados y un triángulo equilátero

La longitud de su lado es 39.3 mm y las coordenadas de su centro O, son O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_V = 39,3 mm

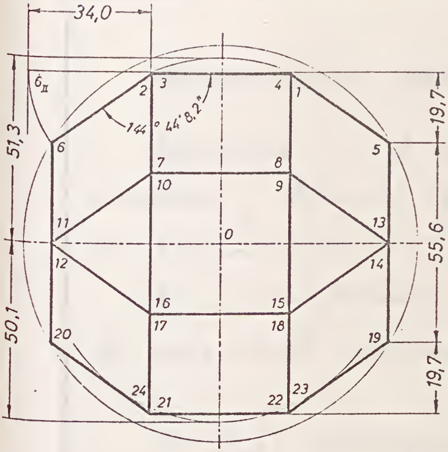
UNE A4 210 X 297

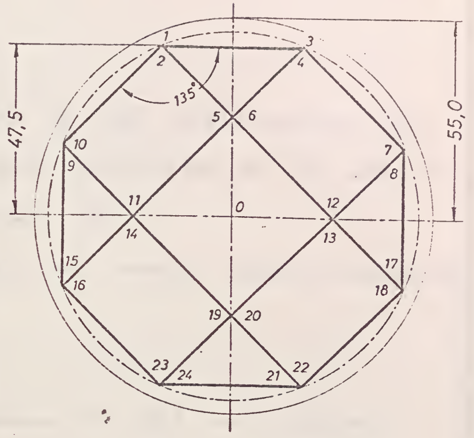
		10 - 3 - 73

I

III

+Z

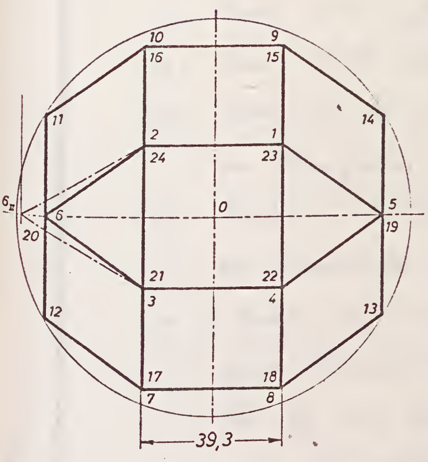




+X

O

+Y.



+Y

II

ARQUIMEDIANO V

Número de caras triangulares..........	C_3 = 8
Número de caras cuadradas..........	C_4 = 18
Número de vértices..........	V = 24
Número de aristas..........	A = 48
Número de caras de un ángulo sólido:	$1\ C_3 + 3\ C_4$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arqumediano V, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y tres cuadrados.

La longitud de su lado es de 39,3 milímetros y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano V					Lámina 37
						Curso 19 -19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del arquimediano V (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del ar-

quimediano que pasa por una arista de aquella.

φ_{3-4} = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara triangular y otra cuadrada.

φ_{4-4} = Angulo rectilineo del diedro formado por dos caras cuadradas.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 8 caras triangulares regulares y de 18 caras cuadradas; 24 vértices y 48 aristas.

En cada vértice concurren 3 cuadrados y un triángulo equilátero, todos de lados "l" iguales; por consiguiente concurrirán también 4 aristas del arquimediano.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO V} \quad (1\,P_3 + 3\,P_4); \quad C_3 = 8; \quad C_4 = 18; \quad V = 24; \quad A = 48}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

<u>Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.</u>

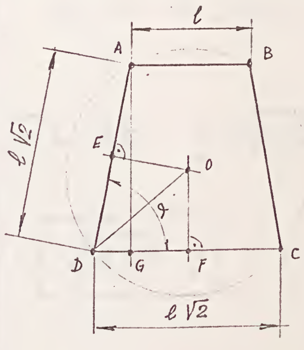


Figura 1

Este polígono es un trapecio isósceles A·B·C·D (fig. 1), cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de la cara triangular) y los otros tres lados AD, DC y CD, todos iguales, son las diagonales de las tres caras cuadradas que completan el ángulo sólido de dicho arquimediano.

Si trazamos por E y F, puntos medios respectivos de los lados AD y DC, perpendiculares a éstos, dichas perpendiculares se cortarán en un punto O, centro de la circunferencia circunscrita al trapecio A·B·C·D, y de radio OD = m. Trazando seguidamente por A, la perpendicular a DC, se nos formará el triángulo rectángulo ADG, recto en G; en éste se verificará que

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2} \qquad \text{y tambien que}$$

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{DG}{A.D} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2} : l\sqrt{2} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2\sqrt{2}\,l} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

y sabiendo, por trigonometría, que

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\alpha\right)}$$ se verificará

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\alpha\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{4+2-\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}}$$

Pero en la figura 1, vemos que $OD = \dfrac{ED}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ y finalmente

$$\boxed{m} = \frac{l\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}}\,l = \sqrt{\frac{2}{\frac{6-\sqrt{2}}{2}}}\,l = \sqrt{\frac{4}{6-\sqrt{2}}}\,l =$$

$$= \boxed{2\times\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\,l} = 0{,}93\,39\,48\,83\ldots\,l$$

(Véase al final de este estudio, otro proceso para la determinación del radio "m")

<u>Radio "a" de la esfera circunscrita</u>

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33), a este caso particular

$$\boxed{a} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-\left(2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\,l\right)^2}} = \frac{l}{2\sqrt{1-4\times\frac{6+\sqrt{2}}{34}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{12+2\sqrt{2}}{17}}}\,l = \frac{1}{2\sqrt{\frac{17-12-2\sqrt{2}}{17}}}\,l = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{17}}}\,l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{5-2\sqrt{2}}}\,l =$$

Lámina 37	Poliedros arquimedianos Arquimediano V	Hoja nº 5

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17\,(5+2\sqrt{2})}{17}}\;l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\;l} = 1,39\,89\,66\,33\ldots\,l$$

(dibujo $a = 55$ mm) $l = 39,315$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}} \times l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{4}}\;l = \boxed{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\;l} = 1,30\,65\,62\,96\ldots\,l$$

(dibujo: $b = 51,3$ mm)

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\;l} = 0,57\,73\,50\,27\ldots\,l$$

(dibujo: $d_3 = 22,7$ mm)

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\;l} = 0,70\,71\,06\,78\ldots\,l$$

(en dibujo $d_4 = 27,8$ mm)

UNE A4 210 X 297

TE		12 - 3 - 73

Lámina 37	Poliedros arquimedianos Arquimediano V	Hoja nº 6

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2-(d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\ \ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{3}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{2}-4}{12}} \times \ell = \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{12}} \times \ell = \frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}}\ell = \frac{\sqrt{\frac{18}{2}}+\sqrt{\frac{4}{2}}}{2\sqrt{3}}\ell =$$

$$= \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\ell = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\ell} = 1,27\ 42\ 73\ 69\ .\ \ell$$

(en dibujo: $c_3 = 50,1$ mm)

Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2-(d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\ \ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}-2}{4}} \times \ell = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}}\ \ell = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}\ell = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}}{2}\ell = \boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\ell} =$$

$$= 1,20\ 71\ 06\ 78 \ldots \ell$$

(en dibujo: $c_4 = 47,5$ mm)

Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

C.C.		13 - 3 - 73

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3\sqrt{4\times\frac{1}{3} - 1}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{6})\times\sqrt{\frac{1}{3}}}{3\times\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3\times\frac{1}{3}} + \sqrt{6\times\frac{1}{3}}}{1} = \boxed{3+\sqrt{2}} = 4,41\,42\,13\,56$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 0,64\,48\,53\,3 \qquad \boxed{\alpha_3 = 77^\circ\ 14'\ 8,2''}$$

Ángulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se determina, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33).

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{2c_4}{\sqrt{4(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2\times\frac{\sqrt{2}+1}{2}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4\times\frac{1}{2} - 1}} = \boxed{\sqrt{2}+1} =$$

$$= 2,41\,42\,13\,56\ldots$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha_4 = 0,382\,77\,57 \qquad \boxed{\alpha_4 = 67^\circ\ 30'\ 00''}$$

Ángulo rectilíneo "φ_{3-4}" del diedro formado por una cara triangular regular y una cuadrada

Lámina 37	Poliedros arquimedianos Arquimediano V	Hoja nº 8

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 77^\circ\ 14'\ 8{,}2'' + 67^\circ\ 30'\ 00''$$

$$= \boxed{144^\circ\ 44'\ 8{,}2''}$$

Ángulo rectilíneo "φ_{4-4}" del diedro formado por dos caras cuadradas.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{4-4}} = 2\,\alpha_4 = 2 \times 67^\circ\ 30' = \boxed{135^\circ}$$

Obsérvese que este valor es el del ángulo que forman dos lados consecutivos de un octógono regular, y en efecto, la proyección del arquimediano, en el plano III, es un octógono regular de lado "l".

Área lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 caras triangulares regulares y de 18 caras cuadradas, ambas de lado "l"; la superficie será pues:

$$\boxed{S} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2 + 18\,l^2 = (2\sqrt{3} + 18)\,l^2 = \boxed{2\,(\sqrt{3}+9)\,l^2} =$$

$$= 21{,}46\ 41\ 01\ 62 \ldots\ l^2$$

[signature]		15 - 3 - 73

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 pirámides de base triangular y altura "c_3" y de 18 pirámides de base cuadrada y altura "c_4"; su valor será:

$$\boxed{V} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 18 \times \ell^2 \times \frac{c_4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6} \ell^3 + 6 \times \frac{\sqrt{2}+1}{2} \ell^3 =$$

$$= \left(\frac{18 + 2\sqrt{18}}{18} + 3\left(\sqrt{2}+1\right)\right) \ell^3 = \left(\frac{3+\sqrt{2}}{3} + \left(3\sqrt{2}+3\right)\right) \ell^3 = \frac{3+\sqrt{2}+9\sqrt{2}+9}{3} \ell^3 =$$

$$= \boxed{\frac{12+10\sqrt{2}}{3} \ell^3} = 8{,}71\ 40\ 45\ 21 \ldots \ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de lado 39,3 mm. y de 18 cuadrados de igual lado, de forma que en cada vértice concurran 3 cuadrados y 1 triángulo.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación resumimos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\ \ell$	$1,398966\ldots\ell$
b	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ \ell$	$1,306563\ldots\ell$
C_3	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\ \ell$	$1,274274\ldots\ell$
C_4	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$1,207107\ldots\ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0,577350\ldots\ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$0,707107\ldots\ell$
m	$2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\ \ell$	$0,933949\ldots\ell$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 3+\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_3 = 4,414214\ldots$ $\alpha_3 = 77^\circ\ 14'\ 8,2''$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 1+\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_4 = 2,414214\ldots$ $\alpha_4 = 67^\circ\ 30'$
φ_{3-4}	$\alpha_3 + \alpha_4$	$\varphi_{3-4} = 144^\circ\ 44'\ 8,2''$
φ_{4-4}	$2\alpha_4$	$\varphi_{4-4} = 135^\circ$
S	$2(\sqrt{3}+9)\ \ell^2$	$21,464102\ldots\ell^2$
V	$\frac{12+10\sqrt{2}}{3}\ \ell^3$	$8,714045\ldots\ell^3$

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 37, a la representación gráfica del Arquimediano V.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores y de procesos gráficos.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_V = Dato del ejercicio = 39,3 mm

a = 1,39 89 66.. × 39,3 = 55,0 mm

b = 1,30 65 63... × 39,3 = 51,3 mm

c_3 = 1,27 42 74... × 39,3 = 50,1 mm

c_4 = 1,20 71 07... × 39,3 = 47,5 mm

d_3 = 0,57 73 50... × 39,3 = 22,7 mm

d_4 = 0,70 71 07... × 39,3 = 27,8 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 37), es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas O(72, 72, 85) mm.

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55,0 mm.

3º Representar en I, II y III las cara cuadradas superior 1 al 4, e inferior 21 al 24, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II, y un lado perpendicular a I (utilícese la cota "c_4" en I y III).

4º Obtener en I las proyecciones del vértice 6 de la cara contigua triangular de arista 2-3, hasta colocar el vértice 6 sobre la esfera circunscrita. Para ello se hará centro en 3_I, con radio igual a la altura "h" de la cara 6-2-3 (dibújese previamente en II), y se

trazará un arco que corte en 6_I a la esfera circunscrita.

5º Repítase la operación anterior para los vértices 5, 19 y 20; obténgase seguidamente las proyecciones de los cuatro vértices anteriores, sobre II y III.

6º La determinación de los restantes vértices del poliedro, en I, II y III, es inmediata y no necesita explicación.

Obsérvese que el contorno aparente de la proyección III, es un octógono regular de lado "l", y que las proyecciones del poliedro en I y II, son iguales, aun cuando no sea coincidente la numeración de vértices en ambas.

Debido a la propiedad enunciada anteriormente, de ser el contorno de la proyección III del arquimediano, un octógono regular de lado "l", puede comprobarse el cálculo de "b", igual al radio de la circunferencia circunscrita, y el de "c_4", igual al de la inscrita.

En efecto, tendremos que el ángulo central de un lado del octógono regular, valdrá:

$$\alpha_0 = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

y por lo tanto

$$\boxed{b} = \frac{l}{2} : \operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_0}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4\times\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{2}}}\, l = \sqrt{\frac{1}{2\times\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)}}\; l =$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$= \sqrt{\frac{1}{2 \times \frac{2-\sqrt{2}}{2}}}\ \ell = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}\ \ell = \boxed{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ \ell}$$

y por otra parte

$$\boxed{c_4} = \frac{\ell}{2} : tg\ \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\ell}{2 \times \frac{1-\cos\alpha_0}{\operatorname{sen}\alpha_0}} = \frac{1}{2 \times \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\ \ell = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\sqrt{2}}\ \ell =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})}{2 \times (4-2)}\ \ell = \frac{2\sqrt{2}+2}{4}\ \ell = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\ \ell}$$

valores ambos coincidentes con los ya calculados.

El cálculo que se incluye a continuación, para la determinación del radio "m" del Arquimediano V, fué el que seguimos primeramente tomando como punto de partida el vértice A.

Como puede verse es mucho más laborioso que el seguido al tomar el vértice D, en el que el radio OD es bisectriz del ángulo D, cosa que no ocurre con el radio OA. ~~que no es bisectriz del ángulo A.~~

El resultado final es coincidente en ambos procesos, como lógicamente debía suceder.

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas de un ángulo sólido.

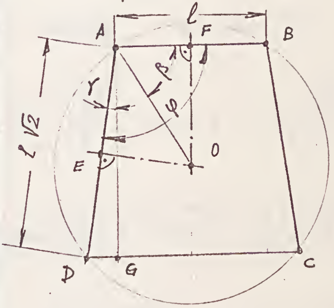


Figura 1

Este polígono es un trapecio isósceles (figura 1), cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de las caras triangulares, y los otros tres lados (BC = CD = DA), todos iguales, son diagonales de las tres caras cuadradas que junto con la triangular, concurren en cualquier ángulo sólido de dicho arquimediano.

Sea (fig. 1), A·B·C·D, el trapecio isósceles; E punto medio del lado AD, y F el medio del AB. Tracemos por E y F, perpendiculares respectivamente a DA y AB; dichas perpendiculares se cortarán en O, centro de la circunferencia circunscrita, cuyo radio OA = m, queremos determinar. Tracemos también por A, la perpendicular al lado DC, cuyo pie G nos determina el triángulo rectángulo A·D·G, recto en G.

De la figura se deduce:

$$AB = l \qquad [1]$$

$$BC = DC = DA = l\sqrt{2} \qquad [2]$$

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \frac{l\sqrt{2} - l}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\, l \qquad [3]$$

Lámina 37	Poliedros arquimedianos Arquimediano V	Hoja nº 4 A

de la [3] y [2], se deduce:

$$\boxed{\text{sen}\ \gamma} = \frac{DG}{DA} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ \ell : \ell\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)\ \ell}{2\sqrt{2}\ \ell} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \qquad [4]$$

y siendo $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$ será $\cos\varphi = -\ \text{sen}\ \gamma$, por lo que

$$\boxed{\cos\varphi} = -\ \text{sen}\ \gamma = -\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-2}{4}} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad [5]$$

$$\boxed{\text{sen}\ \varphi} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2+4-4\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{1-\frac{6-4\sqrt{2}}{16}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{8}} = \sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{2}}{8}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{8}}} \qquad [6]$$

De la figura se deduce:

$$AO = \boxed{m} = \frac{AF}{\cos\beta} = \boxed{\frac{\ell}{2\cos\beta}} \qquad [7]$$

y también

$$AO = \boxed{m} = \frac{AE}{\cos(\varphi-\beta)} = \boxed{\frac{\ell\sqrt{2}}{2\cos(\varphi-\beta)}} \qquad [8]$$

De la [7] y [8]

$$\frac{\ell}{2\cos\beta} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2\cos(\varphi-\beta)} \quad \therefore \quad \cos(\varphi-\beta) = \sqrt{2}\cos\beta \quad \therefore$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \text{sen}\ \varphi\ \text{sen}\ \beta = \sqrt{2}\cos\beta \ \therefore$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \text{sen}\ \varphi\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{2}\cos\beta \qquad [9]$$

si hacemos en [9] $\cos\beta = x$; $\cos\varphi = p$; $\text{sen}\ \varphi = q$

tendremos:

		10 - 3 - 73

$$p x - q \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}\, x \quad " \quad (p-\sqrt{2})x = q\sqrt{1-x^2} \; ;$$

$$p - \sqrt{2} = q\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \quad " \quad \frac{p-\sqrt{2}}{q} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \quad " \quad \left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - 1 \; ;$$

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} \quad " \quad x^2 = \frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}$$ de donde.

$$\therefore \; x = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}} = \cos\beta \qquad [10]$$

valor que sustituido en [7], nos da

$$\boxed{m} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}}}\, l = \sqrt{\frac{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}{4}} \times l =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1} \times l} \qquad [11]$$

sustituyendo en ésta los valores $p = \cos\varphi$; $q = \operatorname{sen}\varphi$, obtenidos en [5] y [6], tendremos:

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4} - \sqrt{2}\right)^2 : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}-2-4\sqrt{2}}{4}\right)^2 : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2}+2)^2}{16} : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} = \frac{18+4+12\sqrt{2}}{16} : \frac{5+2\sqrt{2}}{8} =$$

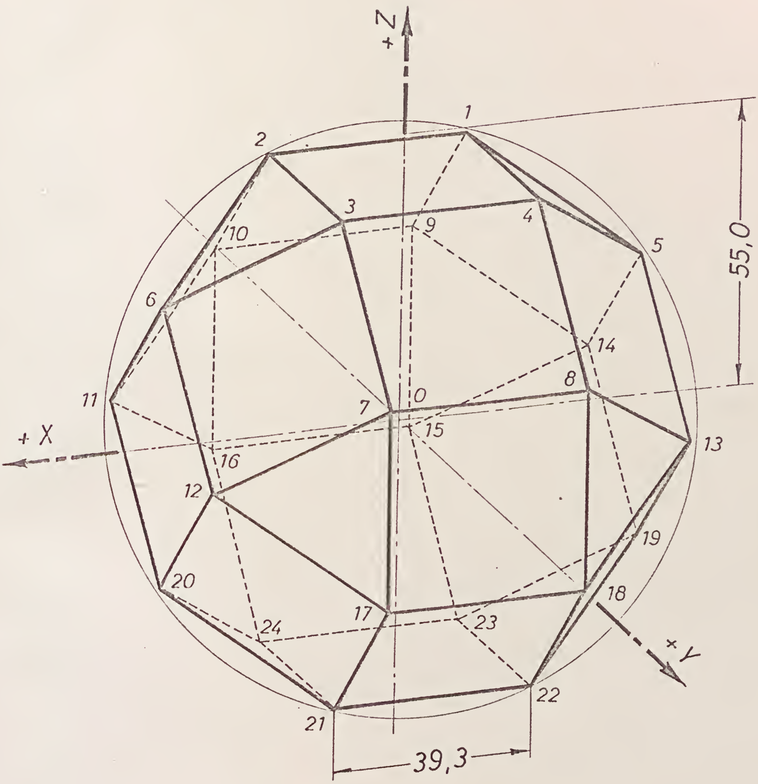
$$= \frac{22+12\sqrt{2}}{16} : \frac{10+4\sqrt{2}}{16} = \frac{22+12\sqrt{2}}{10+4\sqrt{2}} = \frac{11+6\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = \frac{(11+6\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}{17} =$$

$$= \frac{55 + 30\sqrt{2} - 22\sqrt{2} - 24}{17} = \frac{31 + 8\sqrt{2}}{17}$$ y de aquí:

$$\boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31+8\sqrt{2}}{17} + 1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31 + 8\sqrt{2} + 17}{17}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{48 + 8\sqrt{2}}{4 \times 17}}\, l = \sqrt{\frac{24 + 4\sqrt{2}}{34}} \times l = \sqrt{\frac{4(6+\sqrt{2})}{34}}\, l = \boxed{2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}} \times l}$$

$$= 0{,}93\ 39\ 48\ 83 \ldots\, l$$



Arquimediano V